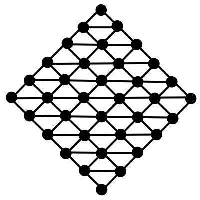
II parcijalni ispit iz diskretne matematike

1. Dino je zaboravio svoju trocifrenu lozinku za pristup studentskom informacionom sistemu. Kada je aktivirao sistem za pomoć u slučaju izgubljene lozinke, dobio je informaciju da lozinka pomnožena sa 3 i podijeljena sa 17 daje ostatak 7, a pomnožena sa 5 i podijeljena sa 29 daje ostatak 10. Pored toga, Dino se sjeća da prva cifra lozinke sigurno nije niti 2 niti 5. Pomozite Dini da sazna zaboravljenu lozinku za pristup. (**2 poena**)

2. Izračunajte $([3]_{87})^{10000000}$. (**2 poena**)

3. Odredite na koliko se načina može doći od tačke A do tačke B kroz mrežu puteva na slici ukoliko je dozvoljeno samo kretanje nadolje (tj. u smjeru opadanja y koordinate). (**2 poena**)



4. Odredite kolika je vjerovatnoća da u 5 uzastopnih bacanja savršeno pravične igraće kocke tačno 2 puta padne paran broj i tačno 2 puta padne broj veći od 3. (**2 poena**)

5. Kroz komunikacioni kanal prenosi se string koji se sastoji samo od znakova X, Y i Z, pri čemu je 30% znakova X i 45% znakova Y. Zbog smetnji u prenosu, u prosjeku pogrešno bude prenesen svaki 150-ti znak X, svaki 300-ti znak Y i svaki 200-ti znak Z. Odredite vjerovatnoću da je izvorno bio poslan znak X ukoliko je ustanovljeno da je znak pogrešno primljen. (**2 poena**)

6. Nacrtajte prvo grafove $\mathcal{G}_1 = (\{a, b, c\}, \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\})$ i $\mathcal{G}_2 = (\{d_1, e\}, \{\{d\}, \{d, e\}\})$, a zatim grafove $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ (njihov kategorički proizvod) i $\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2$ (njihova suma). (**1,5 poena**)

7. Potrebno je optičkim kablovima uspostaviti vezu između 11 telefonskih centrala $C_1 - C_{11}$. Sljedeći spisak opisuje sve moguće načine kablovskog povezivanja lokacija, pri čemu trojka oblika (C_i, C_j, d_{ij}) označava da je moguće spojiti lokacije C_i i C_j, i to kablom dužine d_{ij} (u kilometrima):

   $(C_1, C_2, 6)$ $(C_1, C_4, 11)$ $(C_1, C_5, 5)$ $(C_2, C_3, 15)$ $(C_2, C_4, 18)$ $(C_2, C_5, 8)$ $(C_2, C_7, 11)$
   $(C_3, C_4, 8)$ $(C_3, C_8, 18)$ $(C_3, C_9, 6)$ $(C_4, C_6, 10)$ $(C_4, C_7, 7)$ $(C_5, C_6, 15)$ $(C_5, C_7, 9)$
   $(C_6, C_{11}, 3)$ $(C_7, C_8, 9)$ $(C_7, C_9, 4)$ $(C_7, C_{10}, 13)$ $(C_8, C_9, 14)$ $(C_9, C_{10}, 19)$

   Projektirajte traženu vezu u skladu sa navedenim specifikacijama tako da ukupan utrošak kablova bude minimalan. Postupak izvedite tako da budu vidljivi svi preduzeti koraci. (**3 poena**)

8. Data su dva diskretna sistema opisana diferentnim jednačinama $y_n - 3y_{n-1} = x_n$ i $y_n + 2y_{n-1} = x_n + x_{n-1}$. Nađite diferentne jednačine kojima se opisuju paralelna i serijska (kaskadna) veza ova dva sistema, a nakon toga odredite odziv paralelne veze ovih sistema na pobudu $x_n = n + 1$ za $n \geq 0$ i $x_n = 0$ za $n < 0$. (**3,5 poena**)

9. Neka je potrebno izračunati determinantu formata $n \times n$ koja ima sve jedinice na glavnoj dijagonali i na dvije njoj susjedne dijagonale, a nule na ostalim mjestima, tj. determinantu oblika

$$a_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

   Razvojem ove determinante po prvoj koloni odmah zaključujemo da vrijedi $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$. Dalje očigledno vrijedi $a_1 = 1$ i $a_2 = 0$. Koristeći ove činjenice, nađite eksplicitan izraz za a_n (u kojem se ne smiju javljati kompleksni brojevi). Posebno izračunajte konkretnu brojčanu vrijednost ove determinante za $n = 5000$. (**2 poena**)