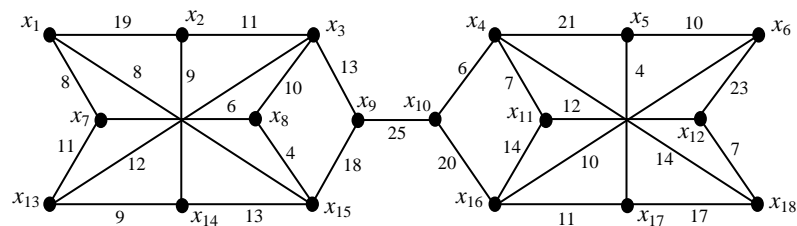


## II parcijalni ispit iz diskretne matematike

- Japanski biznismen je nakon povratka kući iz Sjeverne Amerike razmijenio američke i kanadske dolare koji su mu preostali u jene (japanska nacionalna valuta) i tom prilikom je dobio 15286 jena. Ukoliko je kurs takav da se za jedan američki dolar dobija 122 jena, a za jedan kanadski dolar 112 jena, odredite koliko je američkih a koliko kanadskih dolara razmijenio biznismen ako se zna da je razmijenio barem 50 američkih dolara. **(2 poena)**
- Kvadratne kongruencije oblika  $x^2 \equiv a \pmod{m}$  rješavaju se vrlo lako ako je  $m$  prost broj za koji vrijedi  $\text{mod}(m, 4) = 3$ . Naime, u tom slučaju, ukoliko je ona uopće rješiva, njena tipična rješenja glase  $x = x_0$  i  $x = m - x_0$  gdje je  $x_0 = \text{mod}(a^{(m+1)/4}, m)$ . Koristeći ovu činjenicu, provjerite da li je rješiva kongruencija  $x^2 \equiv 83 \pmod{107}$  i riješite je ukoliko jeste. **(2 poena)**
- Odredite koliko postoji stringova koji se sastoje samo od slova "A", "B" i "C" čija dužina ne prelazi 8 znakova, a u kojima se slovo "B" pojavljuje onoliko puta koliko puta se slova "A" i "C" pojavljuju zajedno. **(2 poena)**
- Neka je dat pravičan novčić, tj. novčić kod kojeg je jednaka vjerovatnoća pojave glave ili pisma prilikom bacanja. Ako bacimo takav novčić 10 puta, očekujemo da će otprilike 5 puta pasti glava i isto toliko puta pismo. Međutim, to naravno ne znači da će sigurno biti tačno 5 pojava glave ili pisma. Odredite:
  - Vjerovatnoću da će se zaista pojaviti 5 puta glava i 5 puta pismo. **(0,7 poena)**
  - Vjerovatnoću da će se glava pojaviti 4, 5 ili 6 puta. **(0,9 poena)**
  - Vjerovatnoću da će se svih 10 puta pojaviti glava. **(0,4 poena)**
- Na stolu se nalaze 4 kompakt diska (CD-a) bez omotnica i natpisa, od kojih jedan prvi sadrži 12 pop-rock pjesama i 7 turbo-folk pjesama, drugi sadrži 10 turbo-folk pjesama i 3 pop-rock pjesme, treći disk sadrži MP3 kompilaciju pjesama Seke Aleksić, dok je četvrti disk posljednji album Aerosmitha. Neko nasumice odabere jedan disk i nasumice odabere jednu pjesmu sa njega. Ukoliko je odabrana pjesma turbo-folk pjesma, kolika je vjerovatnoća da je u pitanju drugi disk? **(2 poena)**
- Nacrtajte prvo grafove  $G_1 = (\{x_1, x_2, x_3\}, \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}\})$  i  $G_2 = (\{y_1, y_2\}, \{\{y_1\}, \{y_1, y_2\}\})$ , a zatim grafove  $G_1 \times G_2$  (njihov kategorički proizvod) i  $G_1 + G_2$  (njihova suma). **(1,5 poena)**
- Za neusmjereni težinski graf na slici nađite minimalno povezujuće stablo pomoću Kruskalovog algoritma (uz bojenje čvorova) kao i najkraće puteve od čvora  $x_2$  do svih ostalih čvorova u grafu pomoću Dijkstrinog algoritma. U oba slučaja postupak provedite tako da budu vidljivi svi koraci primijenjenih algoritama. **(3 poena)**



- Dat je kauzalan diskretni sistem opisan diferentnom jednačinom  $y_n - 3y_{n-1} + 2y_{n-2} = -2x_n + 5x_{n-1}$ .
  - Odredite rekursivnim postupkom vrijednosti impulsnog odziva  $h_n$  za  $n = 0..5$  i naslutite opći oblik za  $h_n$ . **(0,7 poena)**
  - Izvedite rezultat koji ste naslutili pod a) koristeći z-transformaciju. **(0,8 poena)**
  - Odredite odziv ovog sistema na pobudu  $x_n = 2^n u_{n-2}$ . **(2 poena)**
- Riješite diferentnu jednačinu  $y_n - y_{n-3} = 1$  uz početne uvjete  $y_0 = 1, y_1 = 2$  i  $y_2 = 0$ . Rješenje mora biti izraženo u obliku u kojem se ne javljaju kompleksni brojevi. **(2 poena)**