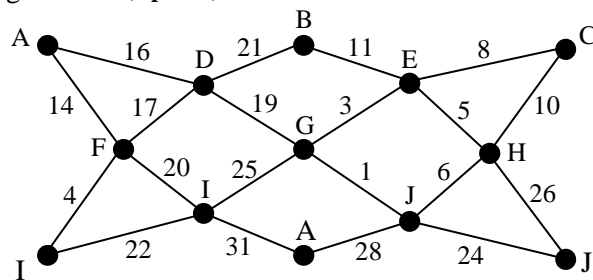
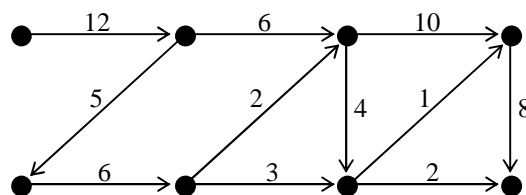


II parcijalni ispit iz diskretne matematike

1. Trojica dječaka čije su dužine stopala respektivno 17, 19 i 25 cm mjerili su dužinu sobe stopama i ustanovili su da nijedan od njih nije izbrojao cijeli broj stopa, nego im je do čitave dužine sobe ostalo 1, 4 odnosno 10 cm respektivno. Odredite koliko je zaista dugačka soba. (2 poena)
2. Odredite kako se odvija razmjena ključeva prema Diffie-Hellmanovom protokolu između dvije osobe A i B koje su se prethodno dogovorile da će koristiti generator $g = 3$ i modul $p = 89$, nakon čega su respektivno odabrale tajne brojeve $a = 17$ i $b = 41$. Obavezno utvrdite kako glasi razmijenjeni ključ. (2 poena)
3. Na stolu se nalazi 9 kapa, od kojih su 4 plave, 2 crvene, 2 smeđe i 1 bijela. Stolu prilaze 4 osobe i svaka od njih uzima po jednu kapu. Odredite koliko pri tome može nastati različitih situacija ukoliko smatramo da se dvije kape iste boje ne mogu međusobno razlikovati. (2 poena)
4. Odredite kolika je vjerovatnoća da u 5 uzastopnih bacanja savršeno pravične igraće kocke tačno 2 puta padne paran broj i tačno 2 puta padne broj veći od 3. (2 poena)
5. Tenk se gađa sa 3 projektila, koji imaju vjerovatnoće pogađanja 20%, 30% i 50%. Tenk će sigurno biti uništen ako ga pogode barem 2 projektila, a ukoliko ga pogodi jedan projektil, biće uništen u 60% slučajeva. Odredite vjerovatnoću da će tenk biti uništen, kao i vjerovatnoću da je uništen tenk pogođen samo jednim projektilom. (2 poena)
6. Za neusmjereni težinski graf na slici nađite minimalno povezujuće stablo pomoću Kruskalovog algoritma (uz bojenje čvorova) kao i najkraće puteve od čvora E do svih ostalih čvorova u grafu pomoću Dijkstra algoritma. U oba slučaja postupak provedite tako da budu vidljivi svi koraci primijenjenih algoritama. (3 poena)



7. Numerirajte čvorove usmjerenog grafa sa sljedeće slike tako da čine topološko sortiranje, a nakon toga nađite maksimalni protok od izvora do ponora koristeći Ford-Fulkersonov algoritam (uz Edmonds-Karpovu modifikaciju). Obavezno trebate (pomoću rezidualnog grafa) pokazati da je nađeno rješenje zaista optimalno. (2 poena)



8. Dat je diskretni sistem opisan diferentnom jednačinom $4y_n - y_{n-2} = x_n + x_{n-2}$. Odredite impulsni odziv ovog sistema, kao i odzive na pobudu $x_n = \sin(n\pi/4)$ za $n \geq 0$ i $x_n = 0$ za $n < 0$, odnosno na pobudu $x_n = \sin(n\pi/4)$, $n \in \mathbb{Z}$. Rješenja treba izraziti u obliku u kojem se ne javljaju kompleksni brojevi. (3 poena)
9. Riješite sistem diferentnih jednačina $y_n = 2y_{n-1} - w_n$, $w_n = y_{n-1} + 4w_{n-1}$ uz početne uvjete $y_0 = 2$, $w_0 = 1$. (2 poena)