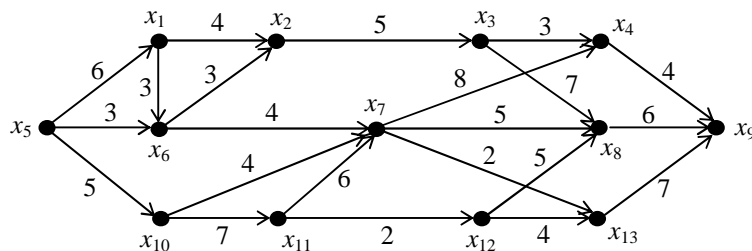


## II parcijalni ispit iz diskretne matematike

- Čopor majmuna je skupljao banane. Kada su skupljene banane pokušali razmjestiti u 11 jednakih gomila, ispostavilo se da preostaje 6 banana koje je nemoguće rasporediti tako da gomile budu jednake. Slično, kada su probali rasporediti banane u 13 jednakih gomila, preostala je jedna banana. Međutim, uspjeli su skupljene banane razmjestiti u 17 jednakih gomila. Odredite koliki je najmanji mogući broj banana za koji je ovakav scenario moguć (uz pretpostavku da su majmuni u stanju uraditi ovo što je opisano, što je prilično diskutabilno). **(2 poena)**
- U nekom kriptografskom protokolu za šifriranje se koristi formula  $y = \text{mod}(x^{11}, 315)$ . Pronađite formulu za dešifriranje i dešifrirajte poruku  $y = 39$ . **(2 poena)**
- Odredite na koliko načina je moguće razmjestiti 10 studenata i 5 profesora oko okruglog stola ukoliko nikoga dva profesora ne smiju sjediti jedan do drugog. **(2 poena)**
- Odredite vjerovatnoću da će u skupini od 6 nasumično izvučenih karata iz dobro izmješanog špila od 52 karte dvije karte biti sa slikom i tri karte crne boje (pik ili tref). **(2 poena)**
- Da bi se oborio avion, potrebno je ili da jedan projektil pogodi u kabinu, ili da dva projektila pogode u krila, ili da tri projektila pogode u trup aviona. Ukoliko neki projektil pogodi avion, vjerovatnoće da je taj pogodak bio u kabinu, krila ili trup iznose redom 10%, 25% i 65% (proporcionalno površini odgovarajućih dijelova aviona). Odredite vjerovatnoću da će avion biti oboren ukoliko se zna
  - da ga je pogodio tačno jedan projektil; **(0,4 poena)**
  - da su ga pogodila tačno dva projektila; **(0,8 poena)**
  - da su ga pogodila tačno tri projektila. **(0,8 poena)**
- Dat je usmjereni aciklični graf kao na sljedećoj slici:



- Nađite najduže puteve od čvora  $x_1$  do svih ostalih čvorova u mreži primjenom Bellman-Fordovog algoritma uz negiranje težina grana. **(2,5 poena)**
  - Nađite maksimalni protok kroz transportnu mrežu koju ovaj graf predstavlja primjenom Ford-Fulkersonovog algoritma. **(2,5 poena)**
- Data su dva diskretna sistema opisana diferentnim jednačinama  $y_n - 3y_{n-1} = x_n$  i  $y_n + 2y_{n-1} = x_n + x_{n-1}$ . Nađite diferentne jednačine kojima se opisuju paralelna i serijska (kaskadna) veza ova dva sistema, a nakon toga odredite odziv paralelne veze ovih sistema na pobudu  $x_n = n + 1$  za  $n \geq 0$  i  $x_n = 0$  za  $n < 0$ . **(3 poena)**
  - Riješite diferentnu jednačinu  $y_n - 2y_{n-1} = \sin(n\pi/3)$  uz početni uvjet  $y_0 = 1$ . Rješenje treba izraziti u obliku u kojem se ne javljaju kompleksni brojevi. **(2 poena)**