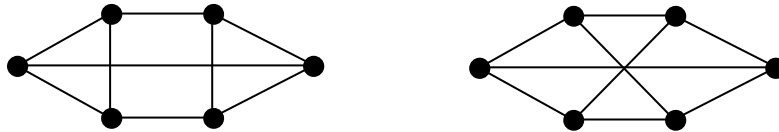
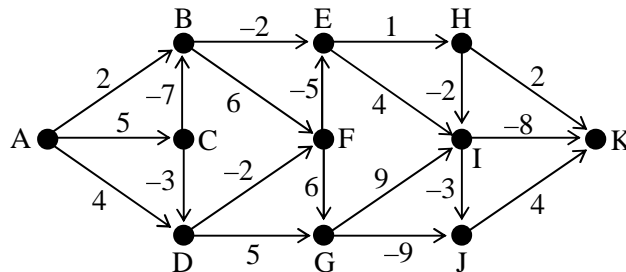


II parcijalni ispit iz diskretne matematike

1. Utvrdite koliko ima prirodnih brojeva manjih od 1232 čiji kvadrat pri dijeljenju sa 1232 daje ostatak 25, ako takvih brojeva uopće ima. (2 poena)
2. U nekom kriptografskom protokolu za šifriranje se koristi formula $y = \text{mod}(x^{11}, 315)$. Pronađite formulu za dešifriranje i dešifrirajte poruku $y = 22$. (2 poena)
Napomena: Ne treba Vas buniti činjenica da u ovom primjeru modul *nije* produkt dva prosta broja (postupak rješavanja ostaje isti). Jedini razlog što je u praksi modul uvijek produkt dva prosta broja je činjenica da je takve module najteže rastaviti na proste faktore, što otežava razbijanje šifre.
3. Odredite na koliko načina je moguće rasporediti 25 kuglica koje se ne mogu međusobno razlikovati u 8 različitih kutija, ali tako da barem jedna kutija bude prazna. (2 poena)
4. Odredite kolika je vjerovatnoća da će se u skupini od 6 nasumično izvučenih karata iz dobro izmješanog špila od 52 karte nalaziti dva asa, tri karte crvene boje (herc ili karo) i jedna Pikova Dama. (2 poena)
5. Na stolu su 4 jednake kutije koje sadrže nagradne kupone. Međutim, samo neki od kupona zaista donose nagradu. U prvoj kutiji se nalazi 5 kupona od kojih 3 donose nagradu, u drugoj 4 kupona od kojih samo jedan nosi nagradu, u trećoj 5 kupona od kojih niti jedan ne donosi nagradu i u četvrtoj 3 kupona od kojih sva tri donose nagradu. Neko je nasumice izabrao kutiju i kupon u njoj i ispostavilo se da taj kupon donosi nagradu. Odredite kolika je vjerovatnoća da je taj kupon izvađen iz druge kutije. (2 poena)
6. Data su dva neusmjerena grafa kao na sljedećoj slici:



- a) Argumentirano ispitajte da li su grafovi na ovoj slici planarni ili ne. (1 poen)
 - b) Pronađite hromatske brojeve za ova dva grafa, uz odgovarajuću argumentaciju. (1 poen)
 - c) Argumentirano utvrdite da li su ova dva grafa međusobno izomorfni ili ne. Ukoliko jesu, nađite numeraciju čvorova koja demonstrira izomorfizam. (1 poen)
7. Grane usmjerenog grafa na sljedećoj slici modeliraju finansijske transakcije između učesnika A–K pri čemu pozitivna težina neke grane označava finansijski gubitak za učesnika iz kojeg ta grana izlazi, dok negativna težina odgovara finansijskoj dobiti. Pronađite optimalan niz transakcija između krajnjih korisnika A i K duž kojeg su ukupni finansijski gubici minimalni. (2 poena)



8. Neki linearni i stacionarni diskretni sistem ima impulsni odziv $h_n = 3(-1)^n - 1$. Koristeći tehnike zasnovane na z-transformaciji, nađite impulsni odziv h_n' inverznog sistema ovog sistema. Također nađite odziv ovog sistema na (kauzalnu) pobudu $x_n = 2^n \cos(n\pi/2)$ za $n \geq 0$ i $x_n = 0$ za $n < 0$ kao i njegov odziv na (nekauzalnu) pobudu $x_n = 2^n \cos(n\pi/2)$ za $n \in \mathbb{Z}$. (3 poena)
9. Riješite diferentnu jednačinu $x_n - 2x_{n-1} = n(n+1)$ uz početni uvjet $x_0 = 1$. (2 poena)