I parcijalni ispit iz diskretne matematike

1. Nađite minimalnu disjunktivnu i minimalnu konjunktivnu formu logičkog izraza $(\overline{A} \vee B) \oplus \overline{A}\,\overline{C}$, a zatim izrazite rezultat pomoću Pierceove i pomoću Shefferove operacije. (**3,5 poena**)

2. Pretpostavimo da su poznate sljedeće činjenice:
   - Nakon odigranog derbija, Sabahudin Topalbećirević je sretan ako i samo ako je pobijedio FK Sarajevo;
   - Nakon odigranog derbija, slaviće ili bordo ili plavi navijači, ali ne i jedni i drugi;
   - Ukoliko je pobijedio FK Sarajevo, slaviće bordo navijači;
   - Derbi je odigran i slave plavi navijači.

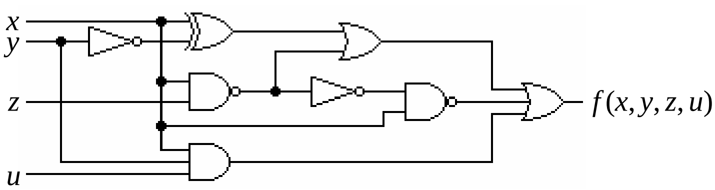
   Iz ovih činjenica može se zaključiti da Sabahudin Topalbećirević nije sretan. Dokažite ispravnost ovog rezonovanja formalnim putem. (**1,5 poen**)

3. Pojednostavite skupovni izraz $A \,\Delta\, B \,\Delta\, (A \cup B)$. Poslužite se Vennovim dijagramima da naslutite rješenje, a zatim ga izvedite primjenom zakona algebre skupova. (**1,5 poen**)

4. Nađite relacije $\mathcal{R}^2$, $\mathcal{R}^3$ i $\mathcal{R}^+$ za relaciju $\mathcal{R} = \{(7,7), (7,13), (13,55), (55,101), (101,55)\}$. (**3 poena**)

5. Nađite šta nije u redu u ovom rezonovanju po kojem ispada da svaka simetrična i tranzitivna relacija $\mathcal{R}$ mora biti i refleksivna: Neka je $(x,y) \in \mathcal{R}$. Na osnovu pretpostavljene simetričnosti relacije, slijedi da je i $(y,x) \in \mathcal{R}$. Dalje, iz pretpostavljene tranzitivnosti, iz pretpostavke da je $(x,y) \in \mathcal{R}$ i $(y,z) \in \mathcal{R}$ slijedi $(x,z) \in \mathcal{R}$. Stavimo li da je $z = x$, što imamo pravo uraditi, dobijamo da iz $(x,y) \in \mathcal{R}$ i $(y,x) \in \mathcal{R}$ slijedi $(x,x) \in \mathcal{R}$. Kako smo na početku pretpostavili da je $(x,y) \in \mathcal{R}$, to kao posljedicu simetričnosti i tranzitivnosti zaključujemo da mora biti $(x,x) \in \mathcal{R}$. Dakle, relacija je također i refleksivna. Šta ovdje “ne štima”? (**1 poen**)

6. Odredite koju prekidačku funkciju realizira mreža sa sljedeće slike, a zatim odredite što je god moguće jednostavniju mrežu koja realizira istu funkciju. (**2 poena**)



7. Predstavite digitalno računanje funkcije $y = \lfloor (2x^2 + 1)/7 \rfloor$ pomoću prekidačkih funkcija ukoliko imamo $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, a $\lfloor x \rfloor$ predstavlja cijeli dio broja x. (**2,5 poena**)

8. Prikažite funkciju $f(x, y, z) = \overline{x\,y \vee y\,z \vee x\,z}$ u standardnom obliku Zhegalkinove algebre. (**1 poen**)

9. Neka je poznato da su svi Bosanci ljudi i neka je poznato da niti jedan čovjek nije besmrtan. Iz toga slijedi da nije tačno da postoje besmrtni Bosanci (bez obzira na to što se pojedinci ponašaju kao da će vječno živjeti). Iskažite ovo rezonovanje jezikom predikatske logike prvog reda. (**1,5 poen**)

10. Pokažite da izraz $\forall x\,(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow \forall x\,(\exists y\,(P(y) \wedge R(x,y)) \Rightarrow \exists z\,(Q(z) \wedge R(x,z)))$ predstavlja valjan izraz predikatske logike. (**2,5 poena**)