I parcijalni ispit iz diskretne matematike

1. Primjenom Quineovog algoritma, izrazite logički izraz $\overline{\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}} \vee \overline{\overline{\mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{C}} \vee \overline{\mathrm{C} \Rightarrow \mathrm{A}}}$ na što je god moguće jednostavniji način pomoću Shefferove operacije i pomoću Pierceove operacije. (**4 poena**)

2. Poznato je da će gospodin Diskretić za godišnji odmor ići ili na more ili na selo, ali ne i na jedno i na drugo mjesto. Gospodin Diskretić će ići na more ukoliko bude imao dovoljno novca. Da bi gospodin Diskretić imao dovoljno novca potrebno je da radi prekovremeno, ili da dobije premiju na lotu. Ukoliko gospodin Diskretić ne ode na selo, neće se sresti sa širom rodbinom. Formalnim putem ustanovite da li će se gospodin Diskretić sresti sa širom rodbinom ukoliko bude radio prekovremeno. (**1,5 poen**)

3. Pojednostavite skupovni izraz $(\mathrm{A} \setminus (\mathrm{A} \setminus \mathrm{B})) \cup (\mathrm{B} \setminus (\mathrm{B} \setminus \mathrm{A}))$. (**1,5 poen**)

4. Neka su u skupu ljudi data relacija $\mathcal{R}$ pri čemu $x\,\mathcal{R}\,y$ neformalno predstavlja odnos “*x* je roditelj od *y*”. Ustanovite u kakvim odnosima su *x* i *y* ukoliko vrijedi:

   a) $x\,\mathcal{R}^{-1}\,y$ b) $x\,\mathcal{R}^{2}\,y$ c) $x\,(\mathcal{R}^{-1})^{2}\,y$ d) $x\,(\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1})\,y$ e) $x\,(\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R})\,y$

   Odgovor mora biti obrazložen. (**1,5 poen**)

5. Nađite $\mathcal{R}^2$, $\mathcal{R}^3$, $\mathcal{R}^+$ i $\mathcal{R}^*$ za relaciju $\mathcal{R} = \{(a, c), (b, c), (c, a), (d, b), (d, d)\}$. (**3 poena**)

6. Ispitajte da li su sljedeće relacije u skupu $\mathrm{A} = \{ f \mid f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \}$ relacije ekvivalencije:

   a) $\mathcal{R}_1 = \{(f, g) \mid f(0) = g(0) \wedge f(1) = g(1)\}$
   b) $\mathcal{R}_2 = \{(f, g) \mid f(0) = g(1) \wedge f(1) = g(0)\}$

   Odgovor mora biti obrazložen. (**1 poen**)

7. Predstavite digitalno računanje funkcije $y = \lfloor (2x^2 + 1)/7 \rfloor$ pomoću prekidačkih funkcija ukoliko imamo $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, a $\lfloor x \rfloor$ predstavlja cijeli dio broja *x*. (**2,5 poena**)

8. Aritmetizirajte prekidačku funkciju $f(x, y, z) = x \vee (y \oplus z)$. (**1 poen**)

9. Prevedite izraz predikatske logike $\forall x\, \mathrm{P}(x) \Rightarrow \neg(\forall x\, \mathrm{Q}(x) \vee \exists x\, \mathrm{R}(x))$ u preneks normalnu formu. (**1 poen**)

10. Neka je poznato da svi navijači FK Sarajevo vole crvenu boju. Neka je dalje poznato da neki navijači FK Sarajevo ne vole niti jednog navijača FK Željezničar. Pokažite formalnim putem da odavde slijedi da za svakog navijača FK Željezničar postoji neka osoba koja ga ne voli, a koja voli crvenu boju. (**3 poena**)