

I parcijalni ispit iz diskretne matematike

- U Ilijadi se mogu pronaći sljedeće činjenice:
 - Ako Hektor dobije bitku, on će opljačkati grad;
 - Ako on ne dobije bitku, on će ili biti ubijen, ili otići u izbjeglištvo;
 - Ako on opljačka grad, Prijam će izgubiti kraljevstvo;
 - Ako Prijam izgubi kraljevstvo ili ako Hektor ode u izbjeglištvo, doći će do svršetka rata.Pokažite formalnim putem da iz ovih činjenica slijedi da ako ne dođe do svršetka rata, tada će Hektor biti ubijen. **(1,5 poen)**
- Primjenom Quineovog algoritma nađite minimalnu konjunktivnu normalnu formu logičkog izraza $\overline{A} \overline{C} B D \vee B D (C \Rightarrow A)$ a zatim izrazite dobijeni logički izraz korištenjem Pierceove operacije. **(3,5 poena)**
- Konstruirajte primjer skupa od tri elementa koji ima osobinu da koja god njegova dva elementa izaberemo, uvijek je jedan od njih element onog drugog. **(1 poen)**
- U skupu $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ data je binarna relacija $\mathcal{R} = \{(a, a), (a, c), (c, d), (d, f), (f, d)\}$.
 - Nađite relaciju $\mathcal{R}^2 \circ \mathcal{R}^{-1}$ po definiciji (po potrebi se možete poslužiti grafičkim prikazom) a zatim provjerite dobijeni rezultat pomoću relacionih matrica. **(1,5 poen)**
 - Nađite tranzitivno-refleksivno zatvorenje relacije \mathcal{R} na bilo koji način. **(2 poena)**
- Dat je uređeni skup $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$.
 - Ispitajte da li je ovo potpuno ili djelimično uređen skup. **(0,5 poena)**
 - Nađite najmanji i najveći element ovog uređenog skupa. **(0,5 poena)**
 - U zadanom uređenom skupu, za njegov podskup $A = \{\{3, 5, 8\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{5, 10\}\}$ nađite $\inf A$ i $\sup A$. **(1 poen)**
- U čuvenom Hilbertovom hotelu “Infinity”, koji naravno ima beskonačno mnogo soba, u ljetnoj sezoni sve su sobe uvijek popunjene. Jednog dana u ljetnoj sezoni ispred hotela dolazi Hilbertov autobus sa beskonačno mnogo putnika, koji traže smještaj. Recepcionar im kaže da jeste činjenica da je hotel do kraja popunjen, ali da će im ipak svima obezbijediti smještaj, i to tako da svaki od putnika iz autobusa dobije svoju vlastitu sobu (tj. da je ne dijeli ni sa kim drugim), a da pri tome niti jedan od postojećih gostiju u hotelu neće morati napustiti hotel. Šta će recepcionar poduzeti da ostvari to obećanje? **(1 poen)**
- Predstavite digitalno računanje funkcije $z = x^2 + y + 1$ pomoću prekidačkih funkcija ukoliko imamo $x \in \{0, 1, 2, 3\}$ i $y \in \{0, 1\}$. Dobijene izraze treba pojednostaviti koliko god je to moguće korištenjem zakona prekidačke logike. **(1,5 poen)**
- Neka je dat skup $B = \{0, a, b, c, d, e, f, 1\}$. Definiirajte operacije “ \sqcup ” i “ \sqcap ” u skupu B tako da trojka (B, \sqcup, \sqcap) bude Booleova algebra, pri čemu ulogu neutralnih elemenata Booleove algebre 0 i 1 preuzimaju elementi 0 i 1 iz B . Uputa: Problem ćete najlakše riješiti ukoliko iskoristite izomorfizam sa nekom poznatom Booleovom algebrom nad osmočlanim skupom. Kako rješenje nije jedinstveno, dovoljno je da pronađete bilo koje rješenje. **(1,5 poen)**
- U klasičnoj logici često se koristi pravilo *modus tolens*, po kojem iz $X \Rightarrow Y$ i $\neg Y$ bezuvjetno slijedi $\neg X$, odnosno po kojem $(X \Rightarrow Y) \wedge \neg Y \Rightarrow \neg X$ mora biti tautologija. Ispitajte da li Kleeneova i Lukasiewiczova implikacija u ternarnoj logici poštuju ovo pravilo. **(1 poen)**
- Šta možete reći o domenu interpretacije u kojoj je izraz $\exists x \forall y (P(x) \wedge (x = y))$ tačan? **(1 poen)**
- Neka je poznato da Denis, koji je student master studija na elektrotehničkom fakultetu, zna pisati neke vrste web aplikacija. Također, neka je poznato da svako ko zna pisati neke vrste web aplikacija može dobiti dobro plaćen posao. Pokažite formalnim putem da iz tih činjenica slijedi da barem neki student master studija na elektrotehničkom fakultetu može dobiti dobro plaćen posao. **(2,5 poena)**