I parcijalni ispit iz diskretne matematike

1. Da bi se održao sastanak Vijeća odsjeka za RI, potrebno je i dovoljno da svi članovi Vijeća budu obaviješteni na vrijeme i da bude kvoruma. Smatra se da ima kvoruma ukoliko se pojavi barem 15 članova Vijeća. Također, članovi Vijeća će sigurno biti obaviješteni na vrijeme, osim ukoliko dođe do pada email servera. Pokažite formalnim putem da iz ovih činjenica slijedi da ako se sastanak Vijeća odsjeka ne održi, tada se na sastanku pojavilo manje od 15 članova, ili je došlo do pada email servera. **(1,5 poen)**

2. Primjenom Quineovog algoritma nađite minimalnu konjunktivnu normalnu formu logičkog izraza

   $$(\mathrm{A} \veebar \mathrm{B})\,\overline{\mathrm{D}} \vee \overline{\mathrm{A}}\,(\mathrm{B} \Leftrightarrow \mathrm{D}) \vee \overline{\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}}\,(\mathrm{D} \Rightarrow \overline{\mathrm{C}})$$

   a zatim izrazite dobijeni logički izraz korištenjem Pierceove operacije. **(3,5 poena)**

3. Nađite partitivni skup skupa $\mathrm{A} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$. **(1 poen)**

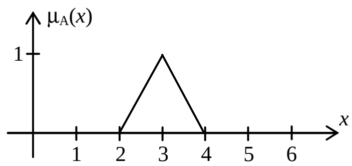
4. U skupu $\mathrm{X} = \{1, 3, 4, 6, 9\}$ data je binarna relacija $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathrm{X}^2 \mid |x - y| \le 3\}$. Ispišite eksplicitno elemente relacije $\mathcal{R}$, a zatim odredite relacije $\mathcal{R}^2$, $\mathcal{R}^3$ i $\mathcal{R}^*$. Da li je relacija $\mathcal{R}$ tranzitivna? Obrazložite odgovor. **(3,5 poena)**

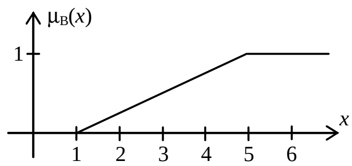
5. Dat je uređeni skup $(\mathcal{P}(\mathrm{A}), \subseteq)$ gdje je $\mathrm{A} = \{a, b, c, d, e\}$.
   a) Argumentirano objasnite zbog čega ovo nije potpuno uređeni skup. **(0,5 poena)**
   b) Nađite najmanji i najveći element ovog uređenog skupa. **(0,5 poena)**
   c) U zadanom uređenom skupu, nađite $\inf \{\{a, b\}, \{b, d\}, \{b, e\}\}$ i $\sup \{\{a, b\}, \{b, d\}, \{b, e\}\}$ **(1 poen)**

6. Pokažite da skup $\mathrm{X} = \{ f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$ nije prebrojiv. **(1 poen)**

7. Predstavite digitalno računanje funkcije $z = (x - y)^2$ pomoću prekidačkih funkcija ukoliko imamo $x \in \{0, 1, 2, 3\}$ i $y \in \{0, 1\}$. Dobijene izraze treba pojednostaviti korištenjem zakona prekidačke logike. **(2 poena)**

8. Dati su fuzzy skupovi $\mathrm{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid \mu_\mathrm{A}(x)\}$ i $\mathrm{B} = \{x \in \mathbb{R} \mid \mu_\mathrm{B}(x)\}$, pri čemu su funkcije pripadnosti $\mu_\mathrm{A}(x)$ i $\mu_\mathrm{B}(x)$ date na slici. Nacrtajte funkcije pripadnosti fuzzy skupova $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$, $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ i $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}$, pri čemu je $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}$ definirano kao $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B} = \mathrm{A} \cap \mathrm{B}'$. Također, odredite sa kojim stepenom pripadnosti element $x = 3.5$ pripada fuzzy skupovima A, B, $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$, $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ i $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}$. **(1,5 poen)**





9. Pokažite kontraprimjerom da izraz predikatske logike $\forall x\,(\mathrm{P}(x) \vee \mathrm{Q}(x)) \Rightarrow \forall x\,\mathrm{P}(x) \vee \forall x\,\mathrm{Q}(x)$ nije valjan. **(1 poen)**

10. Neka je poznato da svi studenti koji su odabrali diskretnu matematiku kao izborni predmet vole neke oblasti matematike. Neka je također poznato da barem jedan student koji je odabrao diskretnu matematiku kao izborni predmet nije položio inžinjersku matematiku. Pokažite formalnim putem da odavde slijedi da nije istina da svi studenti koji nisu položili inžinjersku matematiku ne vole niti jednu oblast matematike. Uradite to tako što ćete formirati odgovarajući izraz predikatske logike koji opisuje ovo rezonovanje, a zatim pokazati njegovu valjanost. **(3 poena)**