I parcijalni ispit iz diskretne matematike

1. Damir i Alen su jedini dječaci u ulici. Jednog jutra, jedan od njih dvojice slučajno je razbio prozor loptom. Poznato je da je to mogao uraditi samo onaj dječak koji tog jutra nije bio u školi. Isto tako, poznato je da je Alen tog jutra bio u školi. Iz toga jasno slijedi da je prozor razbio Damir. Pokažite ispravnost ovog rezonovanja formalnim putem. **(1 poen)**

2. Primjenom Quineovog algoritma nađite minimalnu konjunktivnu normalnu formu logičkog izraza

   $\mathrm{A}\,(\mathrm{B} \veebar \mathrm{C}) \vee (\overline{\mathrm{BC}} \Rightarrow \mathrm{A}\,(\mathrm{CD} \vee \overline{\mathrm{B} \vee \mathrm{D}}))$

   a zatim izrazite dobijeni logički izraz korištenjem Pierceove operacije. **(3,5 poena)**

3. Dokažite pomoću pravila algebre skupova da je operacija “\” distributivna prema operaciji “$\cup$”, odnosno da vrijedi $(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \setminus \mathrm{C} = (\mathrm{A} \setminus \mathrm{C}) \cup (\mathrm{B} \setminus \mathrm{C})$. **(1 poen)**

4. Za relaciju $\mathcal{R} = \{(a, e), (g, g), (g, c), (e, a), (c, a)\}$ u skupu $\mathrm{X} = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ nađite relacije $\mathcal{R}^{-1}$, $\mathcal{R}^2$, $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R}^2$, $\mathcal{R}^2 \circ \mathcal{R}^{-1}$ i $\mathcal{R}^*$. **(3,5 poena)**

5. Ispitajte funkciju $f = (\mathcal{F}, \mathrm{X}, \mathrm{X})$ gdje je $\mathrm{X} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $\mathcal{F} = \{(1, 4), (2, 2), (3, 5), (4, 1), (5, 5)\}$ na injektivnost, sirjektivnost i bijektivnost, a zatim nađite njenu generaliziranu inverznu funkciju, te sve njene fiksne tačke i invarijante. **(1,5 poen)**

6. Nađite kako u uređenom skupu $(\mathbb{N}, \,|\,)$ glase elementi intervala $(5\,..\,50)$, $(10\,..\,30)$, $(15\,..\,25)$ i $(15\,..\,60)$, kao i segmenata $[5\,..\,50]$, $[10\,..\,30]$, $[15\,..\,25]$ i $[15\,..\,60]$. **(1 poen)**

7. Predstavite digitalno računanje funkcije $y = \mathrm{mod}(2\,x^2 + 9, 12)$ pomoću prekidačkih funkcija ukoliko imamo $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, a $\mathrm{mod}(x, y)$ predstavlja ostatak pri dijeljenju x sa y. Dobijene izraze treba pojednostaviti korištenjem zakona prekidačke logike. **(2 poena)**

8. Formirajte formulu ternarne logike sa jednom promjenljivom X koja je tačna samo ukoliko X ima vrijednost U, a inače je netačna (Uputa: koristite Łukasiewiczovu implikaciju). **(1 poen)**

9. Neka je nad skupom $\mathrm{X} = \{a, b, c, d, e\}$ definiran predikat $\mathrm{P}(x, y)$ pomoću sljedeće tablice:

$\mathrm{P}(x, y)$	a	b	c	d	e
a	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$
b	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
c	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
d	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$
e	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

   a) Napravite tablice istine za predikate $\mathrm{Q}(x) = \forall y\, \mathrm{P}(x, y)$, $\mathrm{R}(x) = \exists y\, \mathrm{P}(x, y)$, $\mathrm{S}(y) = \forall x\, \mathrm{P}(x, y)$ i $\mathrm{T}(y) = \exists x\, \mathrm{P}(x, y)$ u ovisnosti od njihovog argumenta (x odnosno y). **(0,7 poena)**

   b) Odredite istinitost svakog od iskaza $\mathrm{I}_1 = \forall x\, \forall y\, \mathrm{P}(x, y)$, $\mathrm{I}_2 = \exists x\, \forall y\, \mathrm{P}(x, y)$, $\mathrm{I}_3 = \forall x\, \exists y\, \mathrm{P}(x, y)$, $\mathrm{I}_4 = \exists x\, \exists y\, \mathrm{P}(x, y)$, $\mathrm{I}_5 = \forall y\, \forall x\, \mathrm{P}(x, y)$, $\mathrm{I}_6 = \exists y\, \forall x\, \mathrm{P}(x, y)$, $\mathrm{I}_7 = \forall y\, \exists x\, \mathrm{P}(x, y)$ i $\mathrm{I}_8 = \exists y\, \exists x\, \mathrm{P}(x, y)$. **(0,8 poena)**

10. Svedite izraz predikatske logike $\forall x\, \forall y\, (\exists z\, \mathrm{P}(x, y, z) \wedge (\exists z\, \mathrm{Q}(x, z) \Rightarrow \exists z\, \mathrm{Q}(y, z)))$ na preneks normalnu formu. **(1 poen)**

11. Neka je poznato da svi građani poznaju neke javne ličnosti. Neka je također poznato da se barem jedan građanin ne bavi muzikom. Pokažite formalnim putem da odavde slijedi da nije istina da svi koji se ne bave muzikom ne poznaju niti jednu javnu ličnost. Uradite to tako što ćete formirati odgovarajući izraz predikatske logike prvog reda i pokazati njegovu valjanost. **(3 poena)**