I parcijalni ispit iz diskretne matematike

1. Neka su poznate sljedeće činjenice:
   a) Da bi reprezentacija BiH otišla na svjetsko prvenstvo, neophodno je i dovoljno da pobijedi reprezentaciju Portugala;
   b) Reprezentacija BiH će pobijediti reprezentaciju Portugala ukoliko reprezentacija Portugala ne bude dovoljno jaka ili ukoliko reprezentacija BiH bude igrala nadprosječno dobro;
   c) Reprezentacija Portugala će biti jaka samo ako za nju bude igrao Ronaldo;
   d) Ronaldo neće igrati za reprezentaciju Portugala zbog povrede.

   Pokažite formalnim putem da iz ovih činjenica slijedi da će reprezentacija BiH otići na svjetsko prvenstvo. **(1 poen)**

2. Primjenom Quineovog algoritma nađite minimalnu disjunktivnu normalnu formu logičkog izraza

   $(\overline{A} \vee \overline{B} \vee C \Rightarrow \overline{A}\overline{B}C) \vee BC \vee \overline{A}(CD \vee \overline{\overline{B} \vee D})$

   a zatim izrazite dobijeni logički izraz korištenjem Shefferove operacije. **(3 poena)**

3. Prikažite izraze algebre skupova $A \cup B$ i $A \cap B$ pomoću izraza u kojima se javljaju samo operacije razlike (\) i simetrične razlike (Δ). Možete se poslužiti Vennovim dijagramima da naslutite rješenje, ali obavezno trebate pokazati ispravnost nađenih rješenja tako što ćete pokazati da se ona formalnim manipulacijama zaista svode na izraze $A \cup B$ odnosno $A \cap B$. **(1,5 poen)**

4. Za relaciju $\mathcal{R} = \{(1,6), (5,5), (5,9), (6,1), (9,1)\}$ nađite relacije $\mathcal{R}^2$, $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R}^2$ i $\mathcal{R}^*$. **(3,5 poena)**

5. Za neki skup A i relaciju $\mathcal{R}$ poznat je faktor skup $A/\mathcal{R} = \{\{1,7\}, \{3\}, \{4,5,9\}\}$. Odredite kako glase skup A i relacija $\mathcal{R}$. **(1 poen)**

6. Dat je uređeni skup $(X, \mathcal{R})$ gdje je $X = \{a, b, c, d, e\}$ i $\mathcal{R} = \{(a,a), (a,d), (a,e), (b,b), (c,b), (c,c), (c,e), (d,d), (e,e)\}$ i dva njegova podskupa $A = \{a, c\}$ i $B = \{d, e\}$. Nađite minimalne i maksimalne elemente ovog uređenog skupa, kao i inf A, sup A, inf B i sup B ukoliko isti postoje (u odnosu na zadani poredak). **(1,5 poen)**

7. Predstavite digitalno računanje funkcije $y = \mathrm{mod}(x^2 + 5, 11)$ pomoću prekidačkih funkcija ukoliko imamo $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, a $\mathrm{mod}(x, y)$ predstavlja ostatak pri dijeljenju x sa y. **(2 poena)**

8. U Kleeneovoj ternarnoj logici uvodi se *operacija konsenzusa* sa oznakom “$\otimes$” koja je takva da vrijedi $X \otimes Y = X$ ukoliko je $X = Y$, inače je $X \otimes Y = \mathsf{U}$.
   a) Formirajte tablicu istine za operaciju konsenzusa. Pokušajte ustanoviti zbog čega se ova operacija baš tako zove i argumentirano pokažite da se ona ne može izraziti pomoću klasičnih operacija ternarne logike (konjunkcije, disjunkcije, negacije te Kleenove i Łukasiewitzeve implikacije). **(0,8 poena)**
   b) Pokažite argumentirano da se Łukasiewitzeva implikacija ne može izraziti pomoću konjunkcije, disjunkcije i negacije (mada Kleeneova implikacija može). **(0,7 poena)**

9. Nad univerzalnim skupom $\mathbb{U} = \{a, b, c, d, e\}$ data su dva fazi skupa $A = 0.3/a + 1/c + 0.8/d + 0.65/e$ i $B = 0.5/a + 0.75/b + 1/c + 0.2/e$. Odrediti fazi skupove $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ i $B \setminus A$ (razlika $X \setminus Y$ se kao i kod klasičnih skupova može izraziti kao $X \setminus Y = X \cap Y'$). **(1 poen)**

10. Neka je domen interpretacije skup ljudi i neka $P(x)$ ima značenje “x je muškarac” dok $Q(x, y)$ ima značenje “x je roditelj od y”. Izrazite jezikom predikatske logike prvog reda sa jednakošću tvrdnju “svaki čovjek ima tačno jednu majku” i svedite je na preneks normalnu formu. **(1 poen)**

11. Neka je poznato da svi studenti koji su odabrali diskretnu matematiku (DM) kao izborni predmet vole neke oblasti matematike. Neka je također poznato da barem jedan student koji je odabrao diskretnu matematiku kao izborni predmet nije položio inžinjersku matematiku (IM). Pokažite formalnim putem da odavde slijedi da nije istina da svi studenti koji nisu položili inžinjersku matematiku ne vole niti jednu oblast matematike. **(3 poena)**