I parcijalni ispit iz diskretne matematike

1. Za američke predsjedničke izbore kandidirani su Barack H. Obama i John McCain, od kojih će jedan (i samo jedan) pobijediti. Barack H. Obama će pobijediti ukoliko kod Amerikanaca bude dovoljno raspoloženja za promjene. Raspoloženje za promjene će postojati ukoliko Amerikanci uspiju prevladati dugogodišnje rasne barijere ili ukoliko im dojadi surova međunarodna politika koju je vodio George Bush. Ukoliko John McCain ne pobijedi, krupni kapitalisti neće biti zadovoljni. Rezultati anketa pouzdano pokazuju da je Amerikancima dojadila Bushova politika. Odredite formalnim putem da li će krupni kapitalisti biti zadovoljni. **(1,5 poen)**

2. Primjenom Quineovog algoritma nađite minimalnu disjunktivnu normalnu formu logičkog izraza

   $AB\,(C \Leftrightarrow D) \lor C\,(AB \lor \overline{A}\,(B \veebar \overline{D})) \lor \overline{(C \Rightarrow A) \lor (D \Rightarrow B)}$

   a zatim izrazite dobijeni logički izraz korištenjem Shefferove operacije. **(3 poena)**

3. Pojednostavite skupovni izraz $(A \setminus (A \setminus B)) \cup (B \setminus (B \setminus A))$. **(1,5 poen)**

4. Nađite relacije $\mathcal{R}^2$ i $\mathcal{R}^*$ za relaciju $\mathcal{R} = \{(1,1), (1,5), (3,4), (4,3), (5,3)\}$ na skupu $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ **(3 poena)**

5. Na skupu $A = \{a, b, c, d\}$ date su relacije $\mathcal{R}_1 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (b, c), (c, b), (c, c), (d, d)\}$, $\mathcal{R}_2 = \{(a, a), (a, b), (b, b), (c, c), (d, d)\}$ i $\mathcal{R}_3 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$. Ispitajte ove tri relacije na refleksivnost, simetričnost i tranzitivnost. Argumentirajte odgovore. **(1,5 poen)**

6. Dat je uređeni skup $(\mathbb{N}, |)$ gdje znak “$|$” predstavlja relaciju “biti djelilac od”, i njegov podskup $A = \{10, 20, 25\}$. Nađite $\inf A$ i $\sup A$ (ne zaboravite da se infimum i supremum računaju relativno u odnosu na izabranu relaciju poretka). **(1 poen)**

7. U skupu kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ uvedena je relacija “$\preceq$” takva da je $z_1 \preceq z_2$ ako i samo ako je $|z_1| \le |z_2|$. Objasnite zašto “$\preceq$” nije relacija poretka. Koje je zapravo vrste relacija “$\preceq$”? **(1 poen)**

8. Predstavite digitalno računanje funkcije $y = \mathrm{mod}(4x + 3, 7)$ pomoću prekidačkih funkcija ukoliko imamo $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, a $\mathrm{mod}(x, y)$ predstavlja ostatak pri dijeljenju x sa y. **(2 poena)**

9. U ternarnoj logici uvode se i unarne operacije “□” i “◊” koje se zovu *operacija nužnosti* i *operacija mogućnosti*. Izraz “□A” čita se kao “nužno je da bude A” i on je tačan samo ako je A sigurno tačan, u suprotnom je netačan. Izraz “◊A” čita se kao “moguće je da bude A”, i on je netačan samo ako je A sigurno netačan.
   a) Sastavite tablice istine za operacije “□” i “◊” i pokažite kako se svaka od ove dvije operacije može izraziti preko one druge operacije i operacije negacije. **(0,5 poena)**
   b) Pokažite kako se operacija “□” može izraziti preko negacije i Lukasiewiczeve implikacije. **(0,5 poena)**

10. Poznato je da ukoliko su $A(x)$ i B neki izrazi predikatske logike koji respektivno zavise odnosno ne zavise od x, tada vrijedi $\forall x\, A(x) \lor B = \forall x\, (A(x) \lor B)$ i $\forall x\, A(x) \land B = \forall x\, (A(x) \land B)$. Međutim, interesantno je da slične formule ne vrijede za implikaciju.
    a) Pokažite kontraprimjerom da ne vrijedi $\forall x\, A(x) \Rightarrow B = \forall x\, (A(x) \Rightarrow B)$. **(0,5 poena)**
    b) Pokažite da umjesto prethodne formule vrijedi $\forall x\, A(x) \Rightarrow B = \exists x\, (A(x) \Rightarrow B)$, što na prvi pogled može djelovati pomalo neočekivano. **(0,5 poena)**
    c) Bez obzira što izrazi $\forall x\, A(x) \Rightarrow B$ i $\forall x\, (A(x) \Rightarrow B)$ nisu ekvivalentni, jedan od ova dva izraza povlači drugi, odnosno jedna od sljedeće dvije implikacije $(\forall x\, A(x) \Rightarrow B) \Rightarrow \forall x\, (A(x) \Rightarrow B)$ i $\forall x\, (A(x) \Rightarrow B) \Rightarrow (\forall x\, A(x) \Rightarrow B)$ je valjana. Intuitivnim putem zaključite koja. **(0,5 poena)**

11. Neka je poznato da svi navijači FK Sarajevo vole crvenu boju. Neka je dalje poznato da neki navijači FK Sarajevo ne vole niti jednog navijača FK Željezničar. Pokažite formalnim putem da odavde slijedi da za svakog navijača FK Željezničar postoji neka osoba koja ga ne voli, a koja voli crvenu boju. **(3 poena)**