I parcijalni ispit iz diskretne matematike

1. Neka je poznato da je gospodina Petrovića u njegovoj kući ubila ili njegova kućna pomoćnica ili njegov baštovan (ali ne oboje skupa). Pretpostavimo dalje da je poznato da bi ulazak baštovana u kuću aktivirao alarm. Konačno, pretpostavimo da činjenice govore da se alarm nije aktivirao. Odavde očigledno slijedi da je gospodina Petrovića ubila kućna pomoćnica. Pokažite ispravnost ovog logičkog rezonovanja formalnim putem. **(1 poen)**

2. Primjenom Quineovog algoritma nađite minimalnu konjunktivnu normalnu formu logičkog izraza $\mathrm{A}\,(\mathrm{B} \Leftrightarrow \mathrm{C}) \vee (\mathrm{B} \veebar \mathrm{C})\,\mathrm{D}$, a zatim izrazite dobijeni logički izraz korištenjem Pierceove operacije. **(3,5 poena)**

3. Neka su dati skupovi $\mathrm{A} = \{a, \{a, \{a\}\}\}$ i $\mathrm{B} = \{\{a\}, \{a, \{a\}\}\}$. Nađite kako glase elementi skupa $(\mathcal{P}(\mathrm{A}) \times \mathcal{P}(\mathrm{B})) \cap (\mathcal{P}(\mathrm{B}) \times \mathcal{P}(\mathrm{A}))$. Uputa: Razmislite malo da ne biste radili veći posao nego što je potrebno, pa poslije kukali kako nemate vremena. **(1 poen)**

4. Pojednostavite skupovni izraz $\mathrm{A}\,\Delta\,\mathrm{B}\,\Delta\,(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$. Poslužite se Vennovim dijagramima da naslutite rješenje, a zatim ga izvedite primjenom zakona algebre skupova. **(1,5 poen)**

5. Na skupu $\mathrm{A} = \{a, b, c, d, e, f\}$ data je relacija $\mathcal{R} = \{(a, a), (a, d), (a, e), (b, b), (b, f), (c, c), (d, a), (d, d), (d, e), (e, a), (e, d), (e, e), (f, b), (f, f)\}$.
   a) Nađite relaciju $\mathcal{R}^2$. **(1 poen)**
   b) Pokažite da je $\mathcal{R}$ relacija ekvivalencije. Uputa: razmotrite matricu koja odgovara relaciji $\mathcal{R}$ kao i odnos između relacija $\mathcal{R}$ i $\mathcal{R}^2$. **(1 poen)**
   c) Nađite faktor skup $\mathrm{A} / \mathcal{R}$. **(1 poen)**

6. Nađite šta nije u redu u ovom rezonovanju po kojem ispada da svaka simetrična i tranzitivna relacija $\mathcal{R}$ mora biti i refleksivna: Neka je $(x, y) \in \mathcal{R}$. Na osnovu pretpostavljene simetričnosti relacije, slijedi da je i $(y, x) \in \mathcal{R}$. Dalje, iz pretpostavljene tranzitivnosti, iz pretpostavke da je $(x, y) \in \mathcal{R}$ i $(y, z) \in \mathcal{R}$ slijedi $(x, z) \in \mathcal{R}$. Stavimo li da je $z = x$, što imamo pravo uraditi, dobijamo da iz $(x, y) \in \mathcal{R}$ i $(y, x) \in \mathcal{R}$ slijedi $(x, x) \in \mathcal{R}$. Kako smo na početku pretpostavili da je $(x, y) \in \mathcal{R}$, to kao posljedicu simetričnosti i tranzitivnosti zaključujemo da mora biti $(x, x) \in \mathcal{R}$. Dakle, relacija je također i refleksivna. Šta ovdje "ne štima"? **(1 poen)**

7. U svemiru ima beskonačno mnogo hotela, koji su numerirani prirodnim brojevima 1, 2, 3 itd. Svaki od tih hotela ima beskonačno mnogo soba, koje su također numerirane prirodnim brojevima 1, 2, 3 itd. Kako je svemirska vlada zaključila da je beskonačno nerentabilno održavati beskonačno mnogo hotela, odlučila je da pozatvara sve te hotele osim jednog. Pokažite da je moguće sve goste iz tih beskonačno mnogo hotela rasporediti u jedini preostali hotel, tako da svaki gost i dalje ima svoju sobu, koju ne dijeli sa drugim gostima. Odnosno, opišite postupak kojim biste za gosta koji je došao iz *n*-te sobe *m*-tog hotela uputili u odgovarajuću sobu jedinog preostalog hotela, a da je sigurno da dva različita gosta neće biti upućena u istu sobu. **(1 poen)**

8. Predstavite digitalno računanje funkcije $y = \mathrm{mod}(3x + 1, 7)$ pomoću prekidačkih funkcija ukoliko imamo $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, a $\mathrm{mod}(x, y)$ predstavlja ostatak pri dijeljenju x sa y. **(2 poena)**

9. Predstavite logički izraz $x \vee \overline{y}\,z \vee \overline{x}\,y\,\overline{z}$ u standardnom obliku Žegalkinove algebre. **(1 poen)**

10. Neka je poznato da su sve Sarajlije Bosanci. Neka je dalje poznato da neki Bosanci vole sve vrste pita. Zapišite jezikom predikatske logike tvrđenje da iz ovoga slijedi da postoje Sarajlije koji vole neke vrste pita. Da li je ovo ispravno zaključivanje? Obrazložite odgovor. **(1,5 poen)**

11. Prevedite izraz $\forall x\, \forall y\, (\exists z\, \mathrm{P}(x, y, z) \wedge (\exists z\, \mathrm{Q}(x, z) \Rightarrow \exists z\, \mathrm{Q}(y, z)))$ u preneks normalnu formu. **(1 poen)**

12. Pokažite valjanost sljedećeg izraza predikatske logike **(2,5 poena)**:

    $\forall x\, (\mathrm{P}(x) \Rightarrow (\mathrm{Q}(x) \wedge \mathrm{R}(x))) \wedge \exists y\, (\mathrm{P}(y) \wedge \mathrm{S}(y)) \Rightarrow \exists z\, (\mathrm{R}(z) \wedge \mathrm{S}(z))$