I parcijalni ispit iz diskretne matematike

1. Svedite logički izraz $((A \Rightarrow (B \oplus B)) \vee C) \oplus (A \vee B) \oplus (C \Rightarrow C)$ svedite na oblik SDNF i SKNF oblik, a nakon toga pomoću Quineovog algoritma nađite njegove MDNF i MKNF i izrazite ove oblike pomoću Shefferove ondosno pomoću Pierceove operacije. (**3,5 poena**)

2. Da bi se održao sastanak Vijeća odsjeka za RI, potrebno je i dovoljno da svi članovi Vijeća budu obaviješteni na vrijeme i da bude kvoruma. Smatra se da ima kvoruma ukoliko se pojavi barem 15 članova Vijeća. Također, članovi Vijeća će sigurno biti obaviješteni na vrijeme, osim ukoliko dođe do pada email servera. Pokažite formalnim putem da iz ovih činjenica slijedi da ako se sastanak Vijeća odsjeka ne održi, tada se na sastanku pojavilo manje od 15 članova, ili je došlo do pada email servera. (**1,5 poen**)

3. Izvedite izraz za kardinalni broj unije $A \cup B \cup C \cup D$ četiri skupa A, B, C i D izražen preko kardinalnih brojeva ova četiri skupa i kardinalnih brojeva njihovih presjeka. (**1,5 poen**)

4. Neka su dati skupovi $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ i $C = \{1, 2, 3, 4\}$, kao i dvije binarne relacije $\mathcal{R}_1 \subseteq A \times B$ i $\mathcal{R}_2 \subseteq B \times C$, formalno date kao

   $\mathcal{R}_1 = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (4, 1), (4, 3), (5, 1), (5, 2)\}$
   $\mathcal{R}_2 = \{(1, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 4)\}$

   Nađite relaciju $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2$ prema definiciji, a zatim provjerite rezultat preko Booleovog množenja relacionih matrica. (**3 poena**)

5. Nađite sve relacije strogog poretka koje se mogu konstruisati u skupu $A = \{a, b, c\}$. Koje su među ovim relacijama relacije potpunog poretka?. (**1,5 poena**)

6. Predstavite digitalno računanje izraza $c = a - b$ pomoću prekidačkih funkcija, pri čemu a i b uzimaju cjelobrojne vrijednosti iz opsega od 0 do 7 uključivo. S obzirom na veći broj neophodnih promjenljivih, rješenje potražite intuitivnim putem. Uputa: analizirajte kako se ručno izvodi oduzimanje binarnih brojeva i postupite slično kao pri digitalnom računanju operacije sabiranja, samo što ćete umjesto prenosa razmatrati “posudbu”. (**2 poena**)

7. Aritmetizirajte prekidačku funkciju $f(x, y, z) = x \vee (y \oplus 1)\, z \vee (x \oplus 1)\, y\, (z \oplus 1)$. (**1 poen**)

8. U ternarnoj logici uvode se i unarne operacije “□” i “◊” koje se zovu *operacija nužnosti* i *operacija mogućnosti*. Izraz “□A” čita se kao “nužno je da bude A” i on je tačan samo ako je A sigurno tačan, u suprotnom je netačan. Izraz “◊A” čita se kao “moguće je da bude A”, i on je netačan samo ako je A sigurno netačan.
   a) Sastavite tablice istine za operacije “□” i “◊” i pokažite kako se svaka od ove dvije operacije može izraziti preko one druge operacije i operacije negacije. (**0,5 poena**)
   b) Pokažite kako se operacija “□” može izraziti preko negacije i Lukasiewiczeve implikacije. (**0,5 poena**)

9. Poznato je da ukoliko su $A(x)$ i B neki izrazi predikatske logike koji respektivno zavise odnosno ne zavise od x, tada vrijedi $\forall x\, A(x) \vee B = \forall x\, (A(x) \vee B)$ i $\forall x\, A(x) \wedge B = \forall x\, (A(x) \wedge B)$. Međutim, interesantno je da slične formule ne vrijede za implikaciju.
   a) Pokažite kontraprimjerom da ne vrijedi $\forall x\, A(x) \Rightarrow B = \forall x\, (A(x) \Rightarrow B)$. (**0,6 poena**)
   b) Pokažite da umjesto prethodne formule vrijedi $\forall x\, A(x) \Rightarrow B = \exists x\, (A(x) \Rightarrow B)$, što na prvi pogled može djelovati pomalo neočekivano. (**0,6 poena**)
   c) Bez obzira što izrazi $\forall x\, A(x) \Rightarrow B$ i $\forall x\, (A(x) \Rightarrow B)$ nisu ekvivalentni, jedan od ova dva izraza povlači drugi, odnosno jedna od sljedeće dvije implikacije $(\forall x\, A(x) \Rightarrow B) \Rightarrow \forall x\, (A(x) \Rightarrow B)$ i $\forall x\, (A(x) \Rightarrow B) \Rightarrow (\forall x\, A(x) \Rightarrow B)$ je valjana. Intuitivnim putem zaključite koja. (**0,8 poena**)

10. Neka je poznato da dežurni oficir pregleda urednost svih osoba koje izlaze iz kasarne a nisu viši oficiri. Dalje, neka je poznato da su neke osobe koje su izlazile iz kasarne neuredne bile pregledane isključivo od neurednih osoba. Konačno, neka je poznato da niti jedan viši oficir nije neuredan. Pokažite formalnim putem da iz ovih činjenica slijedi da su neki dežurni oficiri neuredni. (**3 poena**)