I parcijalni ispit iz diskretne matematike

1. Gospodin Sirotić je u dilemi da li da kupi novi računar ili novi automobil. Dilema je novčane prirode. Naime, gospodin Sirotić ima dovoljno novca za novi računar, ali ne i za novi automobil. Stoga je gospodin Sirotić donio odluku da će ukoliko uspije skupiti dovoljno novca kupiti novi automobil (u suprotnom će kupiti novi računar), dok će računar kupiti nekom drugom prilikom. Gospodin Sirotić će skupiti dovoljno novca ukoliko prihvati dodatni honorarni posao ili ukoliko dobije nagradu na lutriji. Pokažite formalnim putem da iz ovih činjenica slijedi da ukoliko gospodin Sirotić prihvati honorarni posao, tada neće kupiti novi računar. **(1 poen)**

2. Logički izraz $((\mathrm{A} \Rightarrow (\mathrm{C} \oplus \mathrm{C})) \vee \mathrm{B}) \oplus (\mathrm{A} \vee \mathrm{C}) \oplus (\mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{B})$ svedite na SDNF i SKNF oblik, a nakon toga pomoću Quineovog algoritma nađite njegove MDNF i MKNF oblike i izrazite ove oblike pomoću Shefferove ondosno pomoću Pierceove operacije. **(4 poena)**

3. Nađite partitivni skup skupa $\mathrm{X} = \{a, \{a, \{a\}\}, (a, \{a\})\}$. **(1 poen)**

4. Neka su dati skupovi $\mathrm{A} = \{a, b, c, d, e\}$, $\mathrm{B} = \{1, 2, 3\}$ i $\mathrm{C} = \{p, q, r, s\}$, kao i dvije binarne relacije $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathrm{A} \times \mathrm{B}$ i $\mathcal{R}_2 \subseteq \mathrm{B} \times \mathrm{C}$, formalno date kao

   $\mathcal{R}_1 = \{(a, 1), (b, 2), (b, 3), (c, 3), (d, 1), (d, 3), (e, 1), (e, 2)\}$
   $\mathcal{R}_2 = \{(1, p), (1, r), (2, r), (3, p), (3, q), (3, s)\}$

   Nađite relaciju $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2$ prema definiciji, a zatim provjerite rezultat preko Booleovog množenja relacionih matrica. **(3 poena)**

5. Utvrdite koliko se u skupu $\mathrm{X} = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 42\}$ može napraviti simetričnih a koliko antisimetričnih relacija. **(1 poen)**

6. Nađite sve moguće relacije ekvivalencije u skupu $\mathrm{A} = \{a, b, c, d\}$. **(1,5 poen)**

7. Ispitajte da li je skup $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ prebrojiv ili ne. **(1 poen)**

8. Predstavite digitalno računanje funkcije $y = x^2 + 5$ pri čemu je x cijeli broj iz opsega od 0 do 7 uključivo. Dobijene izraze pojednostavite koliko je to moguće neposrednom primjenom pravila logičke algebre. **(2 poena)**

9. Aritmetizirajte prekidačku funkciju $f(x, y, z) = x \vee (y \oplus 1)\, z \vee (x \oplus 1)\, y\, (z \oplus 1)$. **(1 poen)**

10. Neka su dati predikati $\mathrm{P}(x)$ i $\mathrm{Q}(x)$. Formirajte izraz predikatske logike prvog reda koji tvrdi da postoje najviše dva objekta (iz domena interpretacije) koji zadovoljavaju svojstvo $\mathrm{P}(x)$ i barem dva objekta koji zadovoljavaju svojstvo $\mathrm{Q}(x)$. Također navedite barem jednu interpretaciju (tj. domen i smisao predikata P i Q) za koju će formirani iskaz biti tačan. **(1,5 poen)**

11. Neka je poznato da dežurni oficir pregleda urednost svih osoba koje izlaze iz kasarne a nisu viši oficiri. Dalje, neka je poznato da su neke osobe koje su izlazile iz kasarne neuredne bile pregledane isključivo od neurednih osoba. Konačno, neka je poznato da niti jedan viši oficir nije neuredan. Pokažite formalnim putem da iz ovih činjenica slijedi da su neki dežurni oficiri neuredni. **(3 poena)**