I parcijalni ispit iz diskretne matematike

1. Nađite minimalnu disjunktivnu i minimalnu konjunktivnu formu logičkog izraza $(A \vee \overline{C}) \oplus A\overline{B}$ pomoću Quineovog algoritma, a zatim izrazite rezultat pomoću Pierceove i pomoću Shefferove operacije. **(4 poena)**

2. Neka je poznato da je Damir polagao matematiku i elektrotehniku i da je pri tom položio tačno jedan od ta dva ispita. Pretpostavimo dalje da bi Damir uspio upisati drugu godinu da je položio matematiku. Nažalost, Damir nije upisao drugu godinu. Odavde očigledno slijedi da je položeni ispit bio ispit iz elektrotehnike. Pokažite ispravnost ovog logičkog rezonovanja formalnim putem. **(1 poen)**

3. Dat je skup $A = \{(a, a), \{a, a\}\}$. Nađite kako glase elementi skupa $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$. **(1,5 poen)**

4. Nađite $\mathcal{R}^2$, $\mathcal{R}^3$, $\mathcal{R}^+$ i $\mathcal{R}^*$ za relaciju $\mathcal{R} = \{(a, e), (b, a), (b, c), (c, b), (c, d), (d, d), (e, d)\}$. **(3,5 poena)**

5. Navedite jedan primjer relacije u skupu $A = \{a, b, c, d\}$ koja nije ni refleksivna, ni antirefleksivna, ni simetrična, ni antisimetrična. Obrazložite odgovor. **(1 poen)**

6. Ispitajte da li su sljedeće relacije u skupu $A = \{\, f \mid f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \,\}$ relacije ekvivalencije:
   a) $\mathcal{R}_1 = \{(f, g) \mid f(0) = g(0) \wedge f(1) = g(1)\}$
   b) $\mathcal{R}_2 = \{(f, g) \mid f(0) = g(1) \wedge f(1) = g(0)\}$
   Odgovor mora biti obrazložen. **(1,5 poen)**

7. Predstavite digitalno računanje funkcije $y = \lfloor (2x^2 + 9)/8 \rfloor$ pomoću prekidačkih funkcija ukoliko imamo $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, a $\lfloor x \rfloor$ predstavlja cijeli dio broja x. **(2 poena)**

8. Pokažite kontraprimjerom da izraz $\forall x \exists y\, P(x, y) \Rightarrow \exists y \forall x\, P(x, y)$ nije valjan. **(1 poen)**

9. Neka su poznate sljedeće činjenice:

   – Svaki morski pas ulovio je barem jednog mekušca;
   – Svaka velika bijela riba je morski pas;
   – Neke velike ribe žive u dubokoj vodi;
   – Svaki mekušac kojeg je ulovila riba koja živi u dubokoj vodi, nije imao sreće u životu.

   Pokažite formalnim putem da iz navedenih činjenica slijedi da neki mekušci nisu imali sreće u životu. **(3 poena)**

10. Pokažite formalnim putem da je $\exists x\, P(x) \wedge \forall x \forall y\, ((P(x) \wedge P(y)) \Rightarrow (x = y)) \Rightarrow \exists x \forall y\, (P(y) \Rightarrow (x = y))$ valjan izraz predikatske logike sa jednakošću. **(1,5 poen)**