

Iz diferentne jednačine $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ za $n = 2$ dobijamo $a_2 = a_1 - a_0$, tako da je $a_0 = a_1 - a_2 = 1$. Napišimo sada diferentnu jednačinu u obliku $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$. Ako označimo $Z\{a_n\} = A(z)$, tada je, prema pravilima z-transformacije,

$$\begin{aligned} Z\{a_{n+1}\} &= z A(z) - z a_0 = z A(z) - z \\ Z\{a_{n+2}\} &= z^2 A(z) - z^2 a_0 - z a_1 = z^2 A(z) - z^2 - z \end{aligned}$$

Stoga, primjena z-transformacije na diferentnu jednačinu daje jednačinu

$$z^2 A(z) - z^2 - z = z A(z) - z - A(z)$$

što nakon sređivanja daje $(z^2 - z + 1) A(z) = z^2$, odakle je

$$A(z) = \frac{z^2}{z^2 - z + 1}$$

Sada, a_n nalazimo primjenom inverzne z-transformacije. Rastava $A(z) = z P(z)/Q(z)$ daje $P(z) = z$ i $Q(z) = (z - z_1)(z - z_2)$, gdje je $z_1 = (1 + i\sqrt{3})/2$ i $z_2 = (1 - i\sqrt{3})/2$. Pored toga je $Q_1(z) = z - z_2$ i $Q_2(z) = z - z_1$. Stoga primjena formule za inverznu z-transformaciju racionalne funkcije daje:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{z_1}{z_1 - z_2} z_1^n + \frac{z_2}{z_2 - z_1} z_2^n = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{6}\right) \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{6}\right) \left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)^n = \\ &= \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{6}\right) \left(\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{6}\right) \left(\cos\frac{n\pi}{3} - i\sin\frac{n\pi}{3}\right) = \\ &= \cos\frac{n\pi}{3} + i\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{n\pi}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{n\pi}{3} + i\frac{1}{2}\sin\frac{n\pi}{3}\right) = \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{n\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{n\pi}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin\frac{(n+1)\pi}{3} \end{aligned}$$

Konačno je:

$$a_{1000} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin\frac{1001\pi}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin\left(-\frac{\pi}{3} + 167 \cdot 2\pi\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \sin\frac{\pi}{3} = -1$$