

Prvo je potrebno naći funkciju sistema $H(z)$. Stavimo li $x_n = z^n$ tada je $y_n = z^n H(z)$. Diferentna jednačina time postaje $z^n H(z) - z^{n-1} H(z) + z^{n-2} H(z) - z^{n-3} H(z) = z^{n-4}$, tako da imamo:

$$H(z) = \frac{z^{n-4}}{z^n - z^{n-1} + z^{n-2} - z^{n-3}} = \frac{1}{z^4 - z^3 + z^2 - z} = \frac{1}{z(z-1)(z^2+1)}$$

Nazivnik od $H(z)$ smo prikazali u faktoriziranom obliku, što nije osobit problem. Da bismo našli odziv na pobudu $x_n = \sin(n\pi/2)$, $n \geq 0$ i $x_n = 0$, $n < 0$, treba nam njena z -transformacija $X(z)$, koju direktno možemo očitati iz tablice:

$$X(z) = \frac{z}{z^2+1}$$

z -transformacija odziva $Y(z)$ dobija se kao $Y(z) = X(z) H(z)$, tako da je:

$$Y(z) = \frac{1}{(z-1)(z^2+1)^2}$$

Odziv y_n naći ćemo kao inverznu z -transformaciju od $Y(z)$. U prikazu $Y(z) = zP(z)/Q(z)$ imamo $P(z) = 1$, $Q(z) = z(z-1)(z^2+1)^2 = z(z-1)(z-i)^2(z+i)^2$. Polinom $Q(z)$ ima dvije proste nule i dvije dvostruke nule, pri čemu su one pri tome još i kompleksne. Pri tome je $Q_1(z) = (z-1)(z^2+1)^2$, $Q_2(z) = z(z^2+1)^2$, $Q_3(z) = z(z-1)(z+i)^2$ i $Q_4(z) = z(z-1)(z-i)^2$. Sada, u skladu sa izrazom za inverznu z -transformaciju racionalne funkcije, imamo:

$$\begin{aligned} y_n &= \frac{1}{(0-1)(0^2+1)} 0^n + \frac{1}{1 \cdot (1^2+1)^2} 1^n + \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \left[\frac{z^n}{z(z-1)(z+i)^2} \right]_{z=i} + \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \left[\frac{z^n}{z(z-1)(z-i)^2} \right]_{z=-i} = \\ &= -\delta_n + \frac{1}{4} + \frac{d}{dz} \left[\frac{z^{n-1}}{(z-1)(z+i)^2} \right]_{z=i} + \frac{d}{dz} \left[\frac{z^{n-1}}{(z-1)(z-i)^2} \right]_{z=-i} = \\ &= -\delta_n + \frac{1}{4} + \left[\frac{(n-1)z^{n-2}(z-1)(z+i)^2 - z^{n-1}((z+i)^2 + 2(z-1)(z+i))}{(z-1)^2(z+i)^4} \right]_{z=i} + \\ &\quad + \left[\frac{(n-1)z^{n-2}(z-1)(z-i)^2 - z^{n-1}((z-i)^2 + 2(z-1)(z-i))}{(z-1)^2(z-i)^4} \right]_{z=-i} = \\ &= -\delta_n + \frac{1}{4} + \frac{-4(n-1)i^{n-2}(i-1) - i^{n-1}(-4+4i(i-1))}{16(i-1)^2} + \frac{4(n-1)(-i)^{n-2}(i+1) - (-i)^{n-1}(-4+4i(i+1))}{16(i+1)^2} = \\ &= -\delta_n + \frac{1}{4} + \frac{4(n-1)(i-1) - i(8+4i)}{-32i} i^n + \frac{-4(n-1)(i+1) + i(8-4i)}{32i} (-i)^n = \\ &= -\delta_n + \frac{1}{4} + \frac{(3-n)+i(2-n)}{8} i^n + \frac{(3-n)-i(2-n)}{8} (-i)^n = \\ &= -\delta_n + \frac{1}{4} + \frac{(3-n)+i(2-n)}{8} \left(\cos \frac{n\pi}{2} + i \sin \frac{n\pi}{2} \right) + \frac{(3-n)-i(2-n)}{8} \left(\cos \frac{n\pi}{2} - i \sin \frac{n\pi}{2} \right) = \\ &= -\delta_n + \frac{1}{4} + \frac{(3-n)}{8} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{(2-n)}{8} \sin \frac{n\pi}{2} + i \frac{(3-n)}{8} \sin \frac{n\pi}{2} + i \frac{(2-n)}{8} \cos \frac{n\pi}{2} + \\ &\quad + \frac{(3-n)}{8} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{(2-n)}{8} \sin \frac{n\pi}{2} - i \frac{(3-n)}{8} \sin \frac{n\pi}{2} - i \frac{(2-n)}{8} \cos \frac{n\pi}{2} = \\ &= -\delta_n + \frac{1}{4} \left(1 + (3-n) \cos \frac{n\pi}{2} - (2-n) \sin \frac{n\pi}{2} \right), \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

Za nalaženje odziva na pobudu $x_n = \cos(n\pi/4)$, $n \in \mathbb{Z}$, ne možemo koristiti z-transformaciju (barem ne jednostranu), zbog činjenice da pobuda nije kauzalna. Međutim, ovdje ćemo iskoristiti osobinu da je odziv na pobude oblika z^n jednak $z^n H(z)$, zatim na činjenicu da se pobuda x_n može napisati kao $x_n = ((e^{\pi i/4})^n + (e^{-\pi i/4})^n)/2$, kao i na činjenicu da je sistem linearan. Odavde direktno slijedi:

$$\begin{aligned}
y_n &= \frac{1}{2} (e^{n\pi i/4} H(e^{\pi i/4}) + e^{-n\pi i/4} H(e^{-\pi i/4})) = \operatorname{Re}(e^{n\pi i/4} H(e^{\pi i/4})) = \\
&= \operatorname{Re} \frac{e^{n\pi i/4}}{e^{\pi i/4} (e^{\pi i/4} - 1)(e^{\pi i/2} + 1)^2} = \operatorname{Re} \frac{e^{n\pi i/4}}{(e^{\pi i/2} - e^{\pi i/4})(e^{\pi i} + 2e^{\pi i/2} + 1)} = \operatorname{Re} \frac{e^{n\pi i/4}}{2(e^{\pi i/2} - e^{\pi i/4})e^{\pi i/2}} = \\
&= \operatorname{Re} \frac{e^{n\pi i/4}}{2(e^{\pi i} - e^{3\pi i/4})} = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{-2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}} \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right) \right) = \\
&= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{-2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}} \frac{-2 + \sqrt{2} - i\sqrt{2}}{-2 + \sqrt{2} - i\sqrt{2}} \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right) \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{-2 + \sqrt{2} - i\sqrt{2}}{8 - 4\sqrt{2}} \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right) \right) = \\
&= \frac{-2 + \sqrt{2}}{8 - 4\sqrt{2}} \cos \frac{n\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{8 - 4\sqrt{2}} \sin \frac{n\pi}{4} = \frac{(-2 + \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})}{(8 - 4\sqrt{2})(2 + \sqrt{2})} \cos \frac{n\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}(2 + \sqrt{2})}{(8 - 4\sqrt{2})(2 + \sqrt{2})} \sin \frac{n\pi}{4} = \\
&= \frac{-2}{8} \cos \frac{n\pi}{4} + \frac{2 + 2\sqrt{2}}{8} \sin \frac{n\pi}{4} = -\frac{1}{4} \cos \frac{n\pi}{4} + \frac{1 + \sqrt{2}}{4} \sin \frac{n\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$