a) Na osnovu postavke zadatka, direktno zaključujemo

$$y_n = x_n + y_{n-1} + y_{n-1}\frac{p}{100} = x_n + y_{n-1}(1+\frac{p}{100})$$

b) Ovdje je očigledno $x_0 = a$ i $x_n = 0$ za $n \neq 0$, odnosno $x_n = a\,\delta_n$. Kako je račun otvoren u godini $n = 0$ to je $y_n = 0$ za $n < 0$ tako da imamo:

$$y_0 = x_0 + y_{-1}\,(1+\frac{p}{100}) = a$$

$$y_1 = x_1 + y_0\,(1+\frac{p}{100}) = a\,(1+\frac{p}{100})$$

$$y_2 = x_2 + y_1\,(1+\frac{p}{100}) = a\,(1+\frac{p}{100})^2$$

$$y_3 = x_3 + y_2\,(1+\frac{p}{100}) = a\,(1+\frac{p}{100})^3$$

$$y_4 = x_4 + y_3\,(1+\frac{p}{100}) = a\,(1+\frac{p}{100})^4$$

Zapravo, ovdje za $n > 0$ imamo

$$y_n = y_{n-1}(1+\frac{p}{100})$$

što zajedno sa početnom vrijednosti $y_0 = a$ očigledno daje

$$y_n = a\,(1+\frac{p}{100})^n$$

c) Uvrstimo li $x_n = a\,\delta_n$ u diferentnu jednačinu, ona dobija oblik

$$y_n - y_{n-1}(1+\frac{p}{100}) = a\,\delta_n$$

Primijenimo li na obje strane ove jednačine z-transformaciju, dobijamo

$$\mathrm{Y}(z) - z^{-1}\,\mathrm{Y}(z)\,(1+\frac{p}{100}) = a$$

Odavde je:

$$\mathrm{Y}(z) = \frac{a}{1 - z^{-1}(1+\frac{p}{100})} = \frac{a\,z}{z - (1+\frac{p}{100})}$$

Iz izraza za $\mathrm{Y}(z)$ na osnovu tablica i osobina z-transformacije, direktno očitavamo

$$y_n = a\,(1+\frac{p}{100})^n$$

što potvrđuje rezultat dobijen pod b).

d) U ovom slučaju je $x_n = a\,u_n$ odnosno $x_n = a$ za $n \geq 0$, tako da za $n \geq 0$ diferentna jednačina postaje

$$y_n - y_{n-1}\,(1+\frac{p}{100}) = a$$

Primijenimo li na obje strane ove jednačine z-transformaciju, dobijamo

$$\mathrm{Y}(z) - z^{-1}\,\mathrm{Y}(z)\,(1+\frac{p}{100}) = \frac{a\,z}{z-1}$$

Odavde je:

$$\mathrm{Y}(z) = \frac{\dfrac{a\,z}{z-1}}{1-z^{-1}(1+\dfrac{p}{100})} = \frac{a\,z^2}{(z-1)[z-(1+\dfrac{p}{100})]}$$

Primijenimo sada postupak za nalaženje inverzne z-transformacije racionalne funkcije. Rastava $\mathrm{Y}(z) = z\,\mathrm{P}(z)\,/\,\mathrm{Q}(z)$ daje

$$\mathrm{P}(z) = a\,z, \qquad \mathrm{Q}(z) = (z-1)\,[\,z-(1+\frac{p}{100})\,]$$

Polinom $\mathrm{Q}(z)$ očigledno ima dvije proste nule $z_1 = 1$ i $z_2 = 1 + p/100$. Dalje je

$$\mathrm{Q}_1(z) = \mathrm{Q}(z)\,/\,(z-z_1) = z-(1+\frac{p}{100})$$

$$\mathrm{Q}_2(z) = \mathrm{Q}(z)\,/\,(z-z_2) = z-1$$

tako da na osnovu formule za inverznu z-transformaciju racionalne funkcije imamo:

$$y_n = \frac{\mathrm{P}(z_1)}{\mathrm{Q}_1(z_1)}\,z_1^n + \frac{\mathrm{P}(z_2)}{\mathrm{Q}_2(z_2)}\,z_2^n = -\frac{100\,a}{p} + \frac{a\,(100+p)}{p}\,(1+\frac{p}{100})^n =$$

$$= \frac{100\,a}{p}\,((1+\frac{p}{100})^{n+1} - 1)$$

Ovdje je interesantno ukazati na jednu stvar. Mnogi očekuju da će se ukupna svota uvećavati mnogo brže ukoliko se ulaganje vrši konstantno svake godine, nego ukoliko se ulaganje izvrši samo jedanput. Međutim, taj zaključak je pogrešan. Zaista, za veće vrijednosti n član -1 u zagradi može se zanemariti, tako da približan izraz za y_n postaje

$$y_n \approx \frac{100\,a}{p}\,(1+\frac{p}{100})^{n+1} = a\,(1+\frac{100}{p})\,(1+\frac{p}{100})^n$$

Uporedimo li ovaj izraz sa izrazom dobijenim pod b), vidimo da se on razlikuje samo za konstantni faktor $1+100/p$, dok ukupna svota raste potpuno istom brzinom, odnosno u ovom slučaju će ukupna svota prosto svake godine biti veća za isti faktor nego u slučaju kada je ulaganje izvršeno samo jedanput. Ili, drugim riječima, ukoliko u početku samo jednom uložimo iznos koji je $1+100/p$ puta veći od nekog iznosa a, dobijaćemo svake godine praktično istu svotu kao da svake godine konstantno ulažemo jedan te isti iznos a.

e) Prema definiciji impulsnog odziva, vidimo da impulsni odziv h_n možemo neposredno dobiti iz rezultata izvedenog pod b) uzimajući da je $a = 1$. Dakle, imamo

$$h_n = (1+\frac{p}{100})^n$$

Ovo naravno vrijedi za $n \geq 0$, dok za $n < 0$ imamo $h_n = 0$. Na osnovu diskretne konvolucije imamo:

$$y_n = (x * h)_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k x_{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} h_k x_{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (1+\frac{p}{100})^k x_{n-k}$$

Donja granica sumacije je podignuta sa $-\infty$ na 0 zbog činjenice da je h_n kauzalna sekvenca. Ako pretpostavimo da je i x_n kauzalna, tada je $x_{n-k} = 0$ za $k > n$, pa imamo

$$y_n = \sum_{k=0}^{n} (1+\frac{p}{100})^k x_{n-k}$$

f) Stavimo li da je $x_n = a$, na osnovu rezultata pod e) imamo:

$$y_n = \sum_{k=0}^{n} (1+\frac{p}{100})^k a = a \sum_{k=0}^{n} (1+\frac{p}{100})^k = a \frac{(1+\frac{p}{100})^{n+1} - 1}{(1+\frac{p}{100}) - 1} = \frac{100\,a}{p}((1+\frac{p}{100})^{n+1} - 1)$$

Ovim smo potvrdili prethodno izvedeni rezultat. Ovdje je iskorištena poznata formula za sumu geometrijskog reda.