a) Predstavimo funkciju u obliku $X(z) = z\,P(z)/Q(z)$. Pri tome je:

$$P(z) = z+1, \qquad Q(z) = (z-2)\,(z^2+1)\,(z-1)^2$$

Nule $Q(z)$ sa pripadnim višestrukostima su:

$$z_1 = 2,\ \nu_1 = 1; \qquad z_2 = i,\ \nu_2 = 1; \qquad z_3 = -i,\ \nu_3 = 1; \qquad z_4 = 1,\ \nu_4 = 2;$$

Odavde imamo:

$$\begin{gathered} Q_1(z) = Q(z)/(z-z_1) = (z^2+1)\,(z-1)^2 \\ Q_2(z) = Q(z)/(z-z_2) = (z-2)\,(z+i)\,(z-1)^2 \\ Q_3(z) = Q(z)/(z-z_3) = (z-2)\,(z-i)\,(z-1)^2 \\ Q_4(z) = Q(z)/(z-z_4)^2 = (z-2)\,(z^2+1) \end{gathered}$$

Sad, prema općoj formuli za inverznu z-transformaciju racionalne funkcije imamo:

$$\begin{gathered}
x_n = \frac{P(2)}{Q_1(2)}2^n + \frac{P(i)}{Q_2(i)}i^n + \frac{P(-i)}{Q_3(-i)}(-i)^n + \frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\Big[\frac{P(z)\,z^n}{Q_4(z)}\Big]_{z=1} = \\
= \frac{3}{5}2^n + \frac{i+1}{(i-2)\cdot 2i\cdot(i-1)^2}i^n + \frac{-i+1}{(-i-2)\cdot(-2i)\cdot(-i-1)^2}(-i)^n + \frac{d}{dz}\Big[\frac{(z+1)\,z^n}{(z-2)(z^2+1)}\Big]_{z=1} = \\
= \frac{3}{5}2^n + \frac{i+1}{(-2-4i)\cdot(-1-2i+1)}i^n + \frac{-i+1}{(-2+4i)\cdot(-1+2i+1)}(-i)^n + \\
+\Big[\frac{(z^n+(z+1)\,n\,z^{n-1})\,(z-2)\,(z^2+1)-(z+1)\,z^n\,(z^2+1+2\,z\,(z-2))}{(z-2)^2\,(z^2+1)^2}\Big]_{z=1} = \\
= \frac{3}{5}2^n + \frac{i+1}{4i-8}i^n + \frac{-i+1}{-4i-8}(-i)^n - \frac{(1+2n)\cdot(-1)\cdot 2 - 2\cdot(2+2\cdot(-1))}{(-1)^2\,2^2} = \\
= \frac{3}{5}2^n + \frac{(i+1)(-4i-8)}{(4i-8)(-4i-8)}i^n + \frac{(-i+1)(4i-8)}{(-4i-8)(4i-8)}(-i)^n - \frac{1}{2} - n = \\
= \frac{3}{5}2^n + \frac{-4-12i}{80}i^n + \frac{-4+12i}{80}(-i)^n - \frac{1}{2} - n = \frac{3}{5}2^n - \frac{1+3i}{20}i^n - \frac{1-3i}{20}(-i)^n - \frac{1}{2} - n = \\
= \frac{3}{5}2^n - \frac{1+3i}{20}\Big(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\Big)^n - \frac{1-3i}{20}\Big(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}\Big)^n - \frac{1}{2} - n = \\
= \frac{3}{5}2^n - \frac{1+3i}{20}\Big(\cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2}\Big) - \frac{1-3i}{20}\Big(\cos\frac{n\pi}{2} - i\sin\frac{n\pi}{2}\Big) - \frac{1}{2} - n = \\
= \frac{3}{5}2^n - \frac{1}{10}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{3}{10}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{1}{2} - n
\end{gathered}$$

Alternativno, član koji sadrži izvod mogli smo izračunati uz pomoć Leibinzove formule. Na taj način, računali bismo izvod jednostavnije funkcije:

$$\begin{gathered}
\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\Big[\frac{P(z)\,z^n}{Q_4(z)}\Big]_{z=1} = \sum_{i=0}^{1}\frac{1}{(1-i)!}\frac{d^{1-i}}{dz^{1-i}}\Big[\frac{P(z)}{Q_4(z)}\Big]_{z=1}\binom{n}{i}1^{n-i} = \\
= \frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\Big[\frac{z+1}{(z-2)\,(z^2+1)}\Big]_{z=1}\binom{n}{0} + \frac{1}{0!}\Big[\frac{z+1}{(z-2)\,(z^2+1)}\Big]_{z=1}\binom{n}{1} = \\
= \Big[\frac{(z-2)\,(z^2+1)-(z+1)\,(z^2+1+2z\,(z-2))}{(z-2)^2\,(z^2+1)^2}\Big]_{z=1} + \frac{2}{(-1)\cdot 2}n = \frac{1}{2} - n
\end{gathered}$$

Također, za pojednostavljivanje dijela koji sadrži kompleksne brojeve, mogli smo primijeniti formulu

$$\Pi(n)\,\zeta^n + \overline{\Pi(n)}\,\overline{\zeta}^{\,n} = 2\,\rho^n\,(\mathrm{Re}\,\Pi(n)\cos n\varphi - \mathrm{Im}\,\Pi(n)\sin n\varphi), \quad \rho = |\zeta|,\ \varphi = \arg\zeta$$

U konkretnom slučaju, kako je $|\,i\,| = 1$ i $\arg i = \pi/2$, to imamo:

$$-\frac{1+3i}{20}\,i^n - \frac{1-3i}{20}(-i)^n = 2\cdot 1^n\,[\mathrm{Re}\,(-\frac{1+3i}{20})\cos\frac{n\pi}{2} - \mathrm{Im}\,(-\frac{1+3i}{20})\sin\frac{n\pi}{2}] =$$
$$= -\frac{1}{10}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{3}{10}\sin\frac{n\pi}{2}$$

b) Slično kao u prethodnom slučaju, imamo

$$\mathrm{P}(z) = 1, \qquad \mathrm{Q}(z) = (z+1)^2\,(z^2+1)$$

Nule $\mathrm{Q}(z)$ sa pripadnim višestrukostima su:

$$z_1 = -1,\ \nu_1 = 2; \quad z_2 = i,\ \nu_2 = 1; \quad z_3 = -i,\ \nu_3 = 1;$$

Odavde imamo:

$$\mathrm{Q}_1(z) = \mathrm{Q}(z)\,/\,(z-z_1)^2 = z^2+1$$
$$\mathrm{Q}_2(z) = \mathrm{Q}(z)\,/\,(z-z_2) = (z+1)^2\,(z+i)$$
$$\mathrm{Q}_3(z) = \mathrm{Q}(z)\,/\,(z-z_3) = (z+1)^2\,(z-i)$$

Sada, prema formuli za inverznu z-transformaciju racionalne funkcije, imamo:

$$x_n = \frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{\mathrm{P}(z)\,z^n}{\mathrm{Q}_1(z)}\right]_{z=-1} + \frac{\mathrm{P}(i)}{\mathrm{Q}_2(i)}\,i^n + \frac{\mathrm{P}(-i)}{\mathrm{Q}_3(-i)}(-i)^n =$$
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{z^n}{z^2+1}\right]_{z=-1} + \frac{1}{(i+1)^2\cdot 2i}\,i^n + \frac{1}{(-i+1)^2\cdot(-2i)}(-i)^n =$$
$$= \left[\frac{n\,z^{n-1}(z^2+1) - z^n\cdot 2z}{(z^2+1)^2}\right]_{z=-1} + \frac{1}{2i\cdot 2i}\,i^n + \frac{1}{(-2i)\cdot(-2i)}(-i)^n =$$
$$= \left[\frac{(n\,z^2+n-2\,z^2)\,z^{n-1}}{(z^2+1)^2}\right]_{z=-1} - \frac{1}{4}\,i^n - \frac{1}{4}(-i)^n =$$
$$= \frac{2n-2}{4}(-1)^{n-1} - \frac{1}{4}(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})^n - \frac{1}{4}(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2})^n =$$
$$= \frac{1-n}{2}(-1)^n - \frac{1}{4}(\cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2}) - \frac{1}{4}(\cos\frac{n\pi}{2} - i\sin\frac{n\pi}{2}) = \frac{1-n}{2}(-1)^n - \frac{1}{2}\cos\frac{n\pi}{2}$$

Alternativno, član koji sadrži izvod možemo transformisati po Leibinzovoj formuli. Međutim, Leibinzova formula ne daje neku prednost u slučajevima kada je $\mathrm{P}(z)$ vrlo jednostavnog oblika:

$$\frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{\mathrm{P}(z)\,z^n}{\mathrm{Q}_1(z)}\right]_{z=-1} = \sum_{i=0}^{1}\frac{1}{(1-i)!}\frac{\mathrm{d}^{1-i}}{\mathrm{d}z^{1-i}}\left[\frac{\mathrm{P}(z)}{\mathrm{Q}_1(z)}\right]_{z=1}\binom{n}{i}(-1)^{n-i} =$$
$$= \frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{1}{z^2+1}\right]_{z=-1}\binom{n}{0}(-1)^n + \frac{1}{0!}\left[\frac{1}{z^2+1}\right]_{z=-1}\binom{n}{1}(-1)^{n-1} =$$
$$= \left[\frac{-2z}{(z^2+1)^2}\right]_{z=-1}(-1)^n + \frac{1}{2}\,n\,(-1)^{n-1} = \frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{2}\,n\,(-1)^{n-1} = \frac{1-n}{2}(-1)^n$$

c) U ovom slučaju razlaganje $X(z) = z\,P(z)\,/\,Q(z)$ daje:

$$P(z) = z+1, \qquad Q(z) = z\,(z-1)\,(z^2+z+1)^2$$

Faktor z se pojavio u polinomu $Q(z)$ s obzirom na činjenicu da $X(z)$ ne sadrži faktor z u brojniku. Sada su nule $Q(z)$ sa pripadnim višestrukostima

$$z_1 = 0,\ \nu_1 = 1; \quad z_2 = 1,\ \nu_2 = 1; \quad z_3 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\ \nu_3 = 2; \quad z_4 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2},\ \nu_4 = 2$$

Vidimo da imamo kompleksne višestruke nule, što čini postupak računanja prilično mučnim (nažalost, ne postoje načini da se u općem slučaju kod ovakvih slučajeva postupak računanja bitno skrati). Dalje je:

$$Q_1(z) = Q(z)\,/\,(z-z_1) = (z-1)\,(z^2+z+1)^2$$
$$Q_2(z) = Q(z)\,/\,(z-z_2) = z\,(z^2+z+1)^2$$
$$Q_3(z) = Q(z)\,/\,(z-z_3)^2 = z\,(z-1)\,(z-z_4)^2$$
$$Q_4(z) = Q(z)\,/\,(z-z_4)^2 = z\,(z-1)\,(z-z_3)^2$$

"Nezgodne" nule kao što su z_3 i z_4 bolje je voditi u simboličkom obliku, sve dok se izrazi u koje ih treba uvrstiti ne pojednostave dovoljno da uvršvavanje bude praktično. Sada ćemo primijeniti formulu za inverznu z-transformaciju racionalne funkcije. Izraze koje sadrže izvode odmah ćemo izraziti preko Leibinzove formule, jer će to bitno pojednostaviti račun. Također treba voditi računa da 0^n treba zamjeniti sa δ_n:

$$x_n = \frac{P(0)}{Q_1(0)}\,\delta_n + \frac{P(1)}{Q_2(1)}\,1^n + \sum_{i=0}^{1}\frac{1}{(1-i)!}\frac{d^i}{dz^{1-i}}\left[\frac{P(z)}{Q_3(z)}\right]_{z=z_3}\binom{n}{i} z_3^{n-i} + \sum_{i=0}^{1}\frac{1}{(1-i)!}\frac{d^i}{dz^{1-i}}\left[\frac{P(z)}{Q_4(z)}\right]_{z=z_4}\binom{n}{i} z_4^{n-i} =$$
$$= -\delta_n + \frac{2}{9} + \sum_{i=0}^{1}\frac{1}{(1-i)!}\frac{d^i}{dz^{1-i}}\left[\frac{z+1}{(z^2-z)(z-z_4)^2}\right]_{z=z_3}\binom{n}{i} z_3^{n-i} + \sum_{i=0}^{1}\frac{1}{(1-i)!}\frac{d^i}{dz^{1-i}}\left[\frac{z+1}{(z^2-z)(z-z_3)^2}\right]_{z=z_4}\binom{n}{i} z_4^{n-i}$$

Sada ćemo posebno pojednostaviti dijelove ovog izraza. Prva suma može se transformisati ovako:

$$\sum_{i=0}^{1}\frac{1}{(1-i)!}\frac{d^i}{dz^{1-i}}\left[\frac{z+1}{(z^2-z)\,(z-z_4)^2}\right]_{z=z_3}\binom{n}{i} z_3^{n-i} =$$
$$= \frac{d}{dz}\left[\frac{z+1}{(z^2-z)\,(z-z_4)^2}\right]_{z=z_3}\binom{n}{0} z_3^{n} + \left[\frac{z+1}{(z^2-z)\,(z-z_4)^2}\right]_{z=z_3}\binom{n}{1} z_3^{n-1} =$$
$$= \left[\frac{(z^2-z)\,(z-z_4) - (z+1)\,((2z-1)\,(z-z_4) + 2\,(z^2-z))}{(z^2-z)^2\,(z-z_4)^3}\right]_{z=z_3} z_3^n + \frac{z_3+1}{(z_3^2-z_3)\,(z_3-z_4)^2}\,n\,z_3^{n-1} =$$
$$= \left[\frac{(z_3^2-z_3)\,(z_3-z_4) - (z_3+1)\,((2z_3-1)\,(z_3-z_4) + 2\,(z_3^2-z_3))}{(z_3^2-z_3)^2\,(z_3-z_4)^3} + \frac{(z_3+1)\,n}{z_3^2\,(z_3-1)\,(z_3-z_4)^2}\right] z_3^n =$$
$$= \left[\frac{(z_4-z_3)\,(z_3-z_4) - (z_3+1)\,((2z_3-1)\,(z_3-z_4) + 2\,(z_4-z_3))}{(z_4-z_3)^2\,(z_3-z_4)^3} + \frac{(z_3+1)\,(z_3-1)\,n}{z_3^2\,(z_3-1)^2\,(z_3-z_4)^2}\right] z_3^n =$$
$$= \left[\frac{z_4-z_3-(z_3+1)\,(2z_3-3)}{(z_3-z_4)^4} + \frac{(z_4-1)\,n}{(z_4-z_3)^2\,(z_3-z_4)^2}\right] z_3^n = \frac{z_4-z_3-(z_3+1)(2z_3-3)+(z_4-1)\,n}{(z_3-z_4)^4}\,z_3^n =$$
$$= \frac{-i\sqrt{3} - \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})(-4+i\sqrt{3}) + \frac{1}{2}(-3-i\sqrt{3})\,n}{9}\,z_3^n = \frac{7+i\sqrt{3}-(3+i\sqrt{3})\,n}{18}\,z_3^n =$$
$$= \frac{(7-3n)+i\sqrt{3}(1-n)}{18}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

Ovom prilikom je iskorišteno svojstvo $z_3^2 = z_4$ koje se lako provjerava. Što se tiče druge sume, za nju ne moramo ponavljati isti postupak, nego ćemo iskoristiti činjenicu da članovi koji odgovaraju konjugovano kompleksnim nulama i sami moraju biti međusobno konjugovani. Stoga možemo odmah pisati da je

$$\sum_{i=0}^{1} \frac{1}{(1-i)!} \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}z^{1-i}} \left[\frac{z+1}{(z^2-z)(z-z_3)^2}\right]_{z=z_4} \binom{n}{i} z_4^{n-i} = \frac{(7-3n)-i\sqrt{3}(1-n)}{18} \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

Transformirajmo sada zbir ove dvije sume tako da se izgube kompleksni brojevi:

$$\frac{(7-3n)+i\sqrt{3}(1-n)}{18}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \frac{(7-3n)-i\sqrt{3}(1-n)}{18}\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n =$$

$$= \frac{(7-3n)+i\sqrt{3}(1-n)}{18}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^n + \frac{(7-3n)-i\sqrt{3}(1-n)}{18}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^n =$$

$$= \frac{(7-3n)+i\sqrt{3}(1-n)}{18}\left(\cos\frac{2n\pi}{3}+i\sin\frac{2n\pi}{3}\right) + \frac{(7-3n)-i\sqrt{3}(1-n)}{18}\left(\cos\frac{2n\pi}{3}+i\sin\frac{2n\pi}{3}\right) =$$

$$= \frac{7-3n}{9}\cos\frac{2n\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}(1-n)}{9}\sin\frac{2n\pi}{3}$$

Ovdje smo također mogli primijeniti formulu

$$\Pi(n)\,\zeta^n + \overline{\Pi(n)}\,\overline{\zeta}^{\,n} = 2\,\rho^n\,(\mathrm{Re}\,\Pi(n)\cos n\varphi - \mathrm{Im}\,\Pi(n)\sin n\varphi), \quad \rho = |\zeta|,\ \varphi = \arg\zeta$$

Zaista, u konkretnom slučaju imamo

$$\left|\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right| = 1 \quad \text{i} \quad \arg\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \frac{2\pi}{3}$$

tako da je

$$\frac{(7-3n)+i\sqrt{3}(1-n)}{18}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \frac{(7-3n)-i\sqrt{3}(1-n)}{18}\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n =$$

$$= 2\cdot 1^n\left[\mathrm{Re}\,\frac{(7-3n)+i\sqrt{3}(1-n)}{18}\cos\frac{2n\pi}{3} - \mathrm{Im}\,\frac{(7-3n)+i\sqrt{3}(1-n)}{18}\sin\frac{2n\pi}{3}\right] =$$

$$= \frac{7-3n}{9}\cos\frac{2n\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}(1-n)}{9}\sin\frac{2n\pi}{3}$$

što je isti rezultat koji smo već dobili. Konačno je:

$$x_n = -\delta_n + \frac{2}{9} + \frac{7-3n}{9}\cos\frac{2n\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}(1-n)}{9}\sin\frac{2n\pi}{3}$$

d) Razlaganje $X(z) = z\,P(z)/Q(z)$ u ovom slučaju daje:

$$P(z) = z^5 + 1, \quad Q(z) = (z^3+1)(z^3-1) = (z+1)(z^2-z+1)(z-1)(z^2+z+1)$$

Stoga su sve nule polinoma $Q(z)$ proste i glase:

$$z_1 = -1; \quad z_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}; \quad z_3 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}; \quad z_4 = 1; \quad z_5 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}; \quad z_6 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

Dalje imamo:

$$Q_1(z) = Q(z) / (z - z_1) = (z^2 - z + 1)(z^3 - 1)$$
$$Q_2(z) = Q(z) / (z - z_2) = (z + 1)(z - z_3)(z^3 - 1)$$
$$Q_3(z) = Q(z) / (z - z_3) = (z + 1)(z - z_2)(z^3 - 1)$$
$$Q_4(z) = Q(z) / (z - z_4) = (z^3 + 1)(z^2 + z + 1)$$
$$Q_5(z) = Q(z) / (z - z_5) = (z^3 + 1)(z - z_6)$$
$$Q_6(z) = Q(z) / (z - z_6) = (z^3 + 1)(z - z_5)$$

Prije nego što nastavimo dalje, treba uočiti da je $z_2^3 = z_3^3 = -1$, $z_5^3 = z_6^3 = 1$, kao i sljedeće identitete:

$$z_2^5 = (e^{\pi i/3})^5 = e^{5\pi i/3} = e^{-\pi i/3} = z_3$$
$$z_3^5 = (e^{-\pi i/3})^5 = e^{-5\pi i/3} = e^{\pi i/3} = z_2$$
$$z_5^5 = (e^{2\pi i/3})^5 = e^{10\pi i/3} = e^{-2\pi i/3} = z_6$$
$$z_6^5 = (e^{-2\pi i/3})^5 = e^{-10\pi i/3} = e^{2\pi i/3} = z_5$$

Sada, primjenom formule za inverznu z-transformaciju racionalne funkcije, dobijamo:

$$x_n = \frac{P(z_1)}{Q_1(z_1)} z_1^n + \frac{P(z_2)}{Q_2(z_2)} z_2^n + \frac{P(z_3)}{Q_3(z_3)} z_3^n + \frac{P(z_4)}{Q_4(z_4)} z_4^n + \frac{P(z_5)}{Q_5(z_5)} z_5^n + \frac{P(z_6)}{Q_6(z_6)} z_6^n =$$
$$= 0 \cdot 1^n + \frac{z_2^5 + 1}{(z_2+1)(z_2 - z_3)(z_2^3 - 1)} z_2^n + \frac{z_3^5 + 1}{(z_3+1)(z_3 - z_2)(z_3^3 - 1)} z_3^n +$$
$$+ \frac{2}{6} 1^n + \frac{z_5^5 + 1}{(z_5^3+1)(z_5 - 1)(z_5 - z_6)} z_5^n + \frac{z_6^5 + 1}{(z_6^3+1)(z_6 - 1)(z_6 - z_5)} z_6^n =$$
$$= \frac{z_3 + 1}{-2(z_2+1)(z_2 - z_3)} z_2^n + \frac{z_2 + 1}{-2(z_3+1)(z_3 - z_2)} z_3^n + \frac{1}{3} + \frac{z_6 + 1}{2(z_5 - 1)(z_5 - z_6)} z_5^n + \frac{z_3 + 1}{2(z_6 - 1)(z_6 - z_5)} z_6^n =$$
$$= \frac{\frac{3 - i\sqrt{3}}{2}}{-2 \cdot \frac{3 + i\sqrt{3}}{2} \cdot i\sqrt{3}} z_2^n + \frac{\frac{3 + i\sqrt{3}}{2}}{-2 \cdot \frac{3 - i\sqrt{3}}{2} \cdot (-i\sqrt{3})} z_3^n + \frac{1}{3} + \frac{\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}}{2 \cdot \frac{-3 + i\sqrt{3}}{2} \cdot i\sqrt{3}} z_5^n + \frac{\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}}{2 \cdot \frac{-3 - i\sqrt{3}}{2} \cdot (-i\sqrt{3})} z_6^n =$$
$$= \frac{3 - i\sqrt{3}}{6 - 6i\sqrt{3}} z_2^n + \frac{3 + i\sqrt{3}}{6 + 6i\sqrt{3}} z_3^n + \frac{1}{3} + \frac{1 - i\sqrt{3}}{-6 - 6i\sqrt{3}} z_5^n + \frac{1 + i\sqrt{3}}{-6 + 6i\sqrt{3}} z_6^n =$$
$$= \frac{(3 - i\sqrt{3})(6 + 6i\sqrt{3})}{(6 - 6i\sqrt{3})(6 + 6i\sqrt{3})} z_2^n + \frac{(3 + i\sqrt{3})(6 - 6i\sqrt{3})}{(6 + 6i\sqrt{3})(6 - 6i\sqrt{3})} z_3^n + \frac{1}{3} +$$
$$+ \frac{(1 - i\sqrt{3})(-6 + 6i\sqrt{3})}{(-6 - 6i\sqrt{3})(-6 + 6i\sqrt{3})} z_5^n + \frac{(1 + i\sqrt{3})(-6 - 6i\sqrt{3})}{(-6 + 6i\sqrt{3})(-6 - 6i\sqrt{3})} z_6^n =$$
$$= \frac{36 + 12i\sqrt{3}}{144} z_2^n + \frac{36 - 12i\sqrt{3}}{144} z_3^n + \frac{1}{3} + \frac{12 + 12i\sqrt{3}}{144} z_5^n + \frac{12 - 12i\sqrt{3}}{144} z_6^n =$$
$$= \frac{3 + i\sqrt{3}}{12} \left(\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}\right) + \frac{3 - i\sqrt{3}}{12} \left(\cos\frac{n\pi}{3} - i\sin\frac{n\pi}{3}\right) + \frac{1}{3} +$$
$$+ \frac{1 + i\sqrt{3}}{12} \left(\cos\frac{2n\pi}{3} + i\sin\frac{2n\pi}{3}\right) + \frac{1 - i\sqrt{3}}{12} \left(\cos\frac{2n\pi}{3} - i\sin\frac{2n\pi}{3}\right) =$$
$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cos\frac{n\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}\sin\frac{n\pi}{3} + \frac{1}{6}\cos\frac{2n\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}\sin\frac{2n\pi}{3}$$

Ovo je prihvatljiv izraz rezultat, s obzirom da se više ne javljaju kompleksni brojevi. Međutim, uz malo trigonometrijskih manipulacija moguće je dodatno pojednostaviti rješenje:

$$x_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cos\frac{n\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}\sin\frac{n\pi}{3} + \frac{1}{6}\cos\frac{2n\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}\sin\frac{2n\pi}{3} =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{n\pi}{3} - \frac{1}{2}\sin\frac{n\pi}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cos\frac{2n\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{2n\pi}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{n\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{n\pi}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{2n\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{2n\pi}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{3}\right) + \frac{1}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2n\pi}{3}\right) = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}\cos\frac{(2n+1)\pi}{6} + \frac{1}{3}\cos\frac{(2n+1)\pi}{3}$$

Posljednji izraz je najjednostavniji izraz do kojeg je moguće doći klasičnim postupkom i ujedno najjednostavniji koji opisuje ovu sekvencu preko elementarnih funkcija. Međutim, interesantno je da je on i dalje mnogo komplikovaniji nego sama sekvenca koju on opisuje. Naime, mada to na prvi pogled djeluje nevjerovatno iz gornjeg izraza, elementi sekvence x_n za $n = 0, 1, 2$ itd. zapravo glase 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, itd. Izvedimo stoga i mnogo jednostavniji izraz koji opisuje ovu sekvencu. Iz samog izraza za x_n očigledno je da je sekvenca periodična sa periodom N = 6. Sada, na osnovu općeg izraza za izražavanje periodičnih sekvenci preko funkcije “cijeli dio broja”, imamo:

$$x_n = x_{-1} + \sum_{k=0}^{5}(x_k - x_{k-1})\left\lfloor\frac{n-k}{6}\right\rfloor = 1 + (1-1)\left\lfloor\frac{n}{6}\right\rfloor + (0-1)\left\lfloor\frac{n-1}{6}\right\rfloor + (1-0)\left\lfloor\frac{n-5}{6}\right\rfloor =$$

$$= 1 - \left\lfloor\frac{n-1}{6}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n-5}{6}\right\rfloor$$

Ovaj izraz je očigledno mnogo praktičniji i jednostavniji.

Napomena: Ovaj primjer vrlo ubjedljivo ilustrira da se ne treba zalijetati sa primjenom rutinskog postupka za nalaženje inverzne z-transformacije. Naime, bez obzira što je u ovom slučaju nalaženje inverzne z-transformacije rutinskim postupkom bilo prilično mukotrpno, do rezultata se može doći veoma brzo u nekoliko redova primjenom tablica i osnovnih osobina z-transformacije. Zaista, X(z) možemo prikazati u sljedećem obliku:

$$\mathrm{X}(z) = \frac{z(z^5+1)}{(z^3+1)(z^3-1)} = \frac{z^6+z}{z^6-1} = \frac{z^6}{z^6-1} + z^{-5}\frac{z^6}{z^6-1}$$

Ako sada uvedemo pomoćnu sekvencu y_n kao

$$y_n = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z^6}{z^6-1}\right\} = \left\lfloor\frac{n}{6}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{n-1}{6}\right\rfloor$$

što je direktno očitano iz tablica z-trasnformacija, tada na osnovu osobina z-transformacije slijedi:

$$x_n = \mathcal{Z}^{-1}\{\mathrm{X}(z)\} = y_n + y_{n-5}\,u_{n-5} = \left\lfloor\frac{n}{6}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{n-1}{6}\right\rfloor + \left(\left\lfloor\frac{n-5}{6}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{n-6}{6}\right\rfloor\right)u_{n-5} =$$

$$= \left\lfloor\frac{n}{6}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{n-1}{6}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n-5}{6}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{n-6}{6}\right\rfloor = \left\lfloor 1 + \frac{n-6}{6}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{n-1}{6}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n-5}{6}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{n-6}{6}\right\rfloor =$$

$$= 1 + \left\lfloor\frac{n-6}{6}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{n-1}{6}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n-5}{6}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{n-6}{6}\right\rfloor = 1 - \left\lfloor\frac{n-1}{6}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n-5}{6}\right\rfloor$$

Vidimo da smo veoma brzo došli do istog rezultata. Ovdje smo iskoristili činjenicu da je izraz u zagradi svakako jednak nuli za $0 \le n < 5$, pa ga množenje sa u_{n-5} neće dodatno promijeniti (ne zaboravimo da sve posmatramo samo za $n \ge 0$), kao i osobinu da je $\lfloor k + x \rfloor = k + \lfloor x \rfloor$ kadgod je k cijeli broj. Napomenimo još i da nikakvi trikovi slični ovom nisu bili mogući u dijelu zadatka pod a), b) i c).

e) Za ovaj slučaj, razlaganje $X(z) = z\,P(z)/Q(z)$ daje

$$P(z) = z, \qquad Q(z) = (z+2)^3 (z^2-2)^3$$

Stoga, $Q(z)$ ima tri nule i sve su višestrukosti $\nu = 3$:

$$z_1 = -2; \qquad z_2 = \sqrt{2}; \qquad z_3 = -\sqrt{2};$$

Dalje je:

$$Q_1(z) = Q(z)/(z-z_1)^3 = (z^2-2)^3$$
$$Q_2(z) = Q(z)/(z-z_2)^3 = (z+2)^3 (z+\sqrt{2})^3$$
$$Q_3(z) = Q(z)/(z-z_3)^3 = (z+2)^3 (z-\sqrt{2})^3$$

Primjena formule za inverznu z-transformaciju sada daje:

$$x_n = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{P(z)\,z^n}{Q_1(z)}\right]_{z=-2} + \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{P(z)\,z^n}{Q_2(z)}\right]_{z=\sqrt{2}} + \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{P(z)\,z^n}{Q_3(z)}\right]_{z=-\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{z^{n+1}}{(z^2-2)^3}\right]_{z=-2} + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{z^{n+1}}{(z+2)^3(z+\sqrt{2})^3}\right]_{z=\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{z^{n+1}}{(z+2)^3(z-\sqrt{2})^3}\right]_{z=-\sqrt{2}}$$

Ovdje nije korištena Leibinzova formula, s obzirom da je izraz za $P(z)$ vrlo jednostavan. Sada ćemo prvo posebno izračunati članove koji sadrže izvode. Za prvi član imamo:

$$\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{z^{n+1}}{(z^2-2)^3}\right]_{z=-2} = \frac{d}{dz}\left[\frac{(n+1)\,z^n (z^2-2)^3 - z^{n+1}\cdot 3(z^2-2)^2\cdot 2z}{(z^2-2)^6}\right]_{z=-2} =$$

$$= \frac{d}{dz}\left[\frac{(n+1)\,z^n}{(z^2-2)^3} - \frac{6\,z^{n+2}}{(z^2-2)^4}\right]_{z=-2} =$$

$$= \left[\frac{n(n+1)\,z^{n-1}(z^2-2)^3 - (n+1)\,z^n\cdot 3(z^2-2)^2\cdot 2z}{(z^2-2)^6} - \frac{6(n+2)\,z^{n+1}(z^2-2)^4 - 6\,z^{n+2}\cdot 4(z^2-2)^3\cdot 2z}{(z^2-2)^6}\right]_{z=-2} =$$

$$= \left[\frac{n(n+1)\,z^{n-1}}{(z^2-2)^3} - \frac{6(n+1)\,z^{n+1}}{(z^2-2)^4} - \frac{6(n+2)\,z^{n+1}}{(z^2-2)^4} + \frac{48\,z^{n+3}}{(z^2-2)^5}\right]_{z=-2} =$$

$$= \left[\frac{n(n+1)\,z^{n-1}}{(z^2-2)^3} - \frac{6(2n+1)\,z^{n+1}}{(z^2-2)^4} + \frac{48\,z^{n+3}}{(z^2-2)^5}\right]_{z=-2} =$$

$$= \frac{n(n+1)(-2)^{n-1}}{8} - \frac{6(2n+3)(-2)^{n+1}}{16} + \frac{48(-2)^{n+3}}{32} =$$

$$= \frac{-n(n+1) + 12(2n+3) - 192}{16}(-2)^n = \frac{-n^2 + 23n - 156}{16}(-2)^n$$

Za drugi član imamo:

$$\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{z^{n+1}}{(z+2)^3(z+\sqrt{2})^3}\right]_{z=\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{d}{dz}\left[\frac{(n+1)\,z^n (z+2)^3 (z+\sqrt{2})^3 - z^{n+1}\cdot 3(z+2)^2 (z+\sqrt{2})^3 - z^{n+1}(z+2)^3\cdot 3(z+\sqrt{2})^2}{(z+2)^6 (z+\sqrt{2})^6}\right]_{z=-2} =$$

$$= \frac{d}{dz}\left[\frac{(n+1)\,z^n}{(z+2)^3(z+\sqrt{2})^3} - \frac{3\,z^{n+1}}{(z+2)^4(z+\sqrt{2})^3} - \frac{3\,z^{n+1}}{(z+2)^3(z+\sqrt{2})^4}\right]_{z=-2} =$$

$$= \Big[\frac{n(n+1)z^{n-1}(z+2)^3(z+\sqrt{2})^3-(n+1)z^n\cdot 3(z+2)^2(z+\sqrt{2})^3-(n+1)z^n(z+2)^3\cdot 3(z+\sqrt{2})^2}{(z+2)^6(z+\sqrt{2})^6}-$$

$$-\frac{3(n+1)z^n(z+2)^4(z+\sqrt{2})^3-3z^{n+1}\cdot 4(z+2)^3(z+\sqrt{2})^3-3z^{n+1}(z+2)^4\cdot 3(z+\sqrt{2})^2}{(z+2)^8(z+\sqrt{2})^6}-$$

$$-\frac{3(n+1)z^n(z+2)^3(z+\sqrt{2})^4-3z^{n+1}\cdot 3(z+2)^2(z+\sqrt{2})^4-3z^{n+1}(z+2)^3\cdot 4(z+\sqrt{2})^3}{(z+2)^6(z+\sqrt{2})^8}\Big]_{z=-2}=$$

$$=\Big[\frac{n(n+1)z^{n-1}}{(z+2)^3(z+\sqrt{2})^3}-\frac{3(n+1)z^n}{(z+2)^4(z+\sqrt{2})^3}-\frac{3(n+1)z^n}{(z+2)^3(z+\sqrt{2})^4}-\frac{3(n+1)z^n}{(z+2)^4(z+\sqrt{2})^3}+\frac{12z^{n+1}}{(z+2)^5(z+\sqrt{2})^3}+$$

$$+\frac{9z^{n+1}}{(z+2)^4(z+\sqrt{2})^4}-\frac{3(n+1)z^n}{(z+2)^3(z+\sqrt{2})^4}+\frac{9z^{n+1}}{(z+2)^4(z+\sqrt{2})^4}+\frac{12z^{n+1}}{(z+2)^3(z+\sqrt{2})^5}\Big]_{z=-2}=$$

$$=\Big[\frac{n(n+1)z^{n-1}}{(z+2)^3(z+\sqrt{2})^3}-\frac{6(n+1)z^n}{(z+2)^4(z+\sqrt{2})^3}-\frac{6(n+1)z^n}{(z+2)^3(z+\sqrt{2})^4}+$$

$$+\frac{18z^{n+1}}{(z+2)^4(z+\sqrt{2})^4}+\frac{12z^{n+1}}{(z+2)^5(z+\sqrt{2})^3}+\frac{12z^{n+1}}{(z+2)^3(z+\sqrt{2})^5}\Big]_{z=-2}=$$

$$=\frac{n(n+1)(\sqrt{2})^{n-1}}{(\sqrt{2}+2)^3(\sqrt{2}+\sqrt{2})^3}-\frac{6(n+1)(\sqrt{2})^n}{(\sqrt{2}+2)^4(\sqrt{2}+\sqrt{2})^3}-\frac{6(n+1)(\sqrt{2})^n}{(\sqrt{2}+2)^3(\sqrt{2}+\sqrt{2})^4}+$$

$$+\frac{18(\sqrt{2})^{n+1}}{(\sqrt{2}+2)^4(\sqrt{2}+\sqrt{2})^4}+\frac{12(\sqrt{2})^{n+1}}{(\sqrt{2}+2)^5(\sqrt{2}+\sqrt{2})^3}+\frac{12(\sqrt{2})^{n+1}}{(\sqrt{2}+2)^3(\sqrt{2}+\sqrt{2})^5}=$$

$$=\Big[\frac{n(n+1)}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+2)^3\cdot 16\sqrt{2}}-\frac{6(n+1)}{(\sqrt{2}+2)^4\cdot 16\sqrt{2}}-\frac{6(n+1)}{(\sqrt{2}+2)^3\cdot 64}+$$

$$+\frac{18\sqrt{2}}{(\sqrt{2}+2)^4\cdot 64}+\frac{12\sqrt{2}}{(\sqrt{2}+2)^5\cdot 16\sqrt{2}}+\frac{12\sqrt{2}}{(\sqrt{2}+2)^3\cdot 128\sqrt{2}}\Big](\sqrt{2})^n=$$

$$=\Big[\frac{n(n+1)(-\sqrt{2}+2)^3}{32(\sqrt{2}+2)^3(-\sqrt{2}+2)^3}-\frac{3(n+1)\sqrt{2}(-\sqrt{2}+2)^4}{16(\sqrt{2}+2)^4(-\sqrt{2}+2)^4}-\frac{3(n+1)(-\sqrt{2}+2)^3}{32(\sqrt{2}+2)^3(-\sqrt{2}+2)^3}+$$

$$+\frac{9\sqrt{2}(-\sqrt{2}+2)^4}{32(\sqrt{2}+2)^4(-\sqrt{2}+2)^4}+\frac{3(-\sqrt{2}+2)^5}{4(\sqrt{2}+2)^5(-\sqrt{2}+2)^5}+\frac{3(-\sqrt{2}+2)^3}{32(\sqrt{2}+2)^3(-\sqrt{2}+2)^3}\Big](\sqrt{2})^n=$$

$$=\Big[\frac{n(n+1)(20-14\sqrt{2})}{256}-\frac{3(n+1)\sqrt{2}(68-48\sqrt{2})}{256}-\frac{3(n+1)(20-14\sqrt{2})}{256}+$$

$$+\frac{9\sqrt{2}(68-48\sqrt{2})}{512}+\frac{3(232-164\sqrt{2})}{128}+\frac{3(20-14\sqrt{2})}{256}\Big](\sqrt{2})^n=$$

$$=\Big[\frac{n(n+1)(10-7\sqrt{2})}{128}+\frac{(n+1)(144-102\sqrt{2})}{128}-\frac{(n+1)(30-21\sqrt{2})}{128}+$$

$$-\frac{216-153\sqrt{2}}{128}+\frac{696-492\sqrt{2}}{128}+\frac{30-21\sqrt{2}}{128}\Big](\sqrt{2})^n=$$

$$=\frac{(10-7\sqrt{2})n^2+(124-88\sqrt{2})n+624-441\sqrt{2}}{128}(\sqrt{2})^n=$$

$$=\frac{(10-7\sqrt{2})n^2+(124-88\sqrt{2})n+624-441\sqrt{2}}{128}2^{n/2}$$

Jasno je da ovo nije jedini put koji vodi ka sređivanju ovog izraza, ali nažalost svi drugi putevi su barem isto ovoliko glomazni koliko i ovaj.

Što se tiče trećeg člana u izrazu za x_n, ne moramo obavljati sličan glomazni postupak za njegovo računanje kao za slučaj drugog člana. Zaista, ukoliko primijetimo da je jedina razlika između drugog i trećeg člana u tome što se u trećem članu javlja broj $-\sqrt{2}$ na svim onim mjestima gdje se u drugom članu javljao broj $\sqrt{2}$ i ukoliko uzmemo u obzir sa smo sa brojem $\sqrt{2}$ cijelo vrijeme manipulirali kao sa simboličkim objektom, slijedi da je dovoljno u krajnjem izrazu koji smo dobili za drugi član zamijeniti $\sqrt{2}$ sa $-\sqrt{2}$ da dobijemo treći član. Drugim riječima, imamo:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left[\frac{z^{n+1}}{(z+2)^3(z-\sqrt{2})^3}\right]_{z=-\sqrt{2}} = \frac{(10+7\sqrt{2})\,n^2+(124+88\sqrt{2})\,n+624+441\sqrt{2}}{128}(-\sqrt{2})^n =$$
$$= \frac{(10+7\sqrt{2})\,n^2+(124+88\sqrt{2})\,n+624+441\sqrt{2}}{128}(-1)^n\, 2^{n/2}$$

Stoga, traženi izraz za x_n glasi:

$$x_n = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left[\frac{z^{n+1}}{(z^2-2)^3}\right]_{z=-2}+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left[\frac{z^{n+1}}{(z+2)^3(z+\sqrt{2})^3}\right]_{z=\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left[\frac{z^{n+1}}{(z+2)^3(z-\sqrt{2})^3}\right]_{z=-\sqrt{2}} =$$
$$= \frac{-n^2+23n-156}{32}(-2)^n+\frac{(10-7\sqrt{2})\,n^2+(124-88\sqrt{2})\,n+624-441\sqrt{2}}{256}2^{n/2}+$$
$$+\frac{(10+7\sqrt{2})\,n^2+(124+88\sqrt{2})\,n+624+441\sqrt{2}}{256}(-1)^n\, 2^{n/2}$$

Dobijeni izraz je vrlo glomazan, mada generira sekvencu cijelih brojeva, i to takvu da su joj prvih 7 članova nule (zaista, elementi sekvence x_n kada se raspišu za nekoliko prvih vrijednosti n glase 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, –6, 30, –116, 408, –1296, 3888, –11040, 30192, itd.). Ružne formule sa iracionalnim veličinama koje generiraju sekvence cijelih brojeva u teoriji diskretnih sistema nisu nikakva rijetkost. Međutim, u ovom konkretnom slučaju, iracionalnih veličina možemo se osloboditi ukoliko posebno razmatramo slučajeve za n parno i n neparno. Zaista, za n parno je $(-1)^n = 1$, pa imamo:

$$x_n = \frac{-n^2+23n-156}{32}(-2)^n+\frac{(10-7\sqrt{2})\,n^2+(124-88\sqrt{2})\,n+624-441\sqrt{2}}{256}2^{n/2}+$$
$$+\frac{(10+7\sqrt{2})\,n^2+(124+88\sqrt{2})\,n+624+441\sqrt{2}}{256}2^{n/2}$$
$$= \frac{-n^2+23n-156}{32}(-2)^n+\frac{5n^2+62n+312}{64}2^{n/2}$$

S druge strane, za n neparno je $(-1)^n = -1$, pa imamo:

$$x_n = \frac{-n^2+23n-156}{32}(-2)^n+\frac{(10-7\sqrt{2})\,n^2+(124-88\sqrt{2})\,n+624-441\sqrt{2}}{256}2^{n/2}-$$
$$-\frac{(10+7\sqrt{2})\,n^2+(124+88\sqrt{2})\,n+624+441\sqrt{2}}{128}2^{n/2} =$$
$$= \frac{-n^2+23n-156}{32}(-2)^n-\frac{7n^2+88n+441}{128}2^{(n+1)/2}$$

Stoga, izraz za x_n možemo prikazati i ovako:

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{-n^2+23n-156}{32}(-2)^n+\dfrac{5n^2+62n+312}{64}2^{n/2} & ,\quad \text{za } n \text{ parno} \\ \dfrac{-n^2+23n-156}{32}(-2)^n-\dfrac{7n^2+88n+441}{128}2^{(n+1)/2} & ,\quad \text{za } n \text{ neparno} \end{cases}$$

Ni ovaj izraz nije baš šampion elegancije, ali se u njemu barem ne javljaju iracionalni brojevi, pa je mnogo praktičniji za računanje.

Napomena: Činjenica da su prvih 7 članova sekvence nule nije slučajnost. Naime, ukoliko polinom u brojniku funkcije X(z) ima stepen p a polinom u nazivniku stepen q, tada sekvenca x_n dobijena inverznom z-transformacijom funkcije X(z) počinje sa barem $q-p$ nula. I zaista, u razmotrenom slučaju je $p = 2$, $q = 9$, a $q-p = 7$.

f) U ovom slučaju, kada bismo odmah primijenili rastavu $\mathrm{X}(z) = z\,\mathrm{P}(z)/\mathrm{Q}(z)$, dobili bismo da polinom Q(z) ima u tački $z = 0$ nulu šestog reda, tako da bi neposredna primjena formule za inverznu z-transformaciju racionalne funkcije zahtijevala nalaženje izvoda petog reda. Nažalost, direktna primjena klasičnog trika da se uvede pomoćna funkcija $\mathrm{Y}(z) = z^6\,\mathrm{X}(z)$ pa da se nakon nalaženja inverzne z-transformacije y_n funkcije Y(z) iskoristi pravilo prema kojem je $x_n = y_{n-6}\,u_{n-6}$ ovdje nije primjenljivo, jer tako dobijena funkcija Y(z) nema inverznu z-transformaciju, jer joj je stepen polinoma u brojniku veći nego stepen polinoma u nazivniku. Zbog toga ćemo malo ručno transformirati funkciju X(z) da je rastavimo na članove na koje je taj trik primjenljiv. Imamo:

$$\mathrm{X}(z) = \frac{(z-1)^3}{z^5(z^2+z+1)} = \frac{z^3-3z^2+3z-1}{z^5(z^2+z+1)} = \frac{z-3}{z^3(z^2+z+1)} + \frac{3z-1}{z^5(z^2+z+1)} =$$

$$= z^{-4}\frac{z(z-3)}{z^2+z+1} + z^{-6}\frac{z(3z-1)}{z^2+z+1}$$

Sada, ako uvedemo sekvence

$$v_n = \mathcal{Z}^{-1}\{\frac{z(z-3)}{z^2+z+1}\} \quad \text{i} \quad w_n = \mathcal{Z}^{-1}\{\frac{z(3z-1)}{z^2+z+1}\}$$

prema pravilima z-transformacije neposredno slijedi da je

$$x_n = v_{n-4}\,u_{n-4} + w_{n-6}\,u_{n-6}$$

Ostaje da se nađu sekvence v_n i w_n, što je posve rutinski posao. Obje funkcije čiju inverznu z-transformaciju treba naći imaju isti polinom u nazivniku, koji ima dvije jednostruke nule

$$z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \quad \text{i} \quad z_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

Stoga, u skladu sa već mnogo puta provedenim postupkom, imamo:

$$v_n = \frac{z_1-3}{z_1-z_2}z_1^n + \frac{z_2-3}{z_2-z_1}z_2^n = \frac{-7+i\sqrt{3}}{2i\sqrt{3}}(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2})^n + \frac{-7+i\sqrt{3}}{-2i\sqrt{3}}(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2})^n =$$

$$= \frac{3+7i\sqrt{3}}{6}(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})^n + \frac{3-7i\sqrt{3}}{6}(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3})^n =$$

$$= \frac{3+7i\sqrt{3}}{6}(\cos\frac{2n\pi}{3} + i\sin\frac{2n\pi}{3}) + \frac{3-7i\sqrt{3}}{6}(\cos\frac{2n\pi}{3} - i\sin\frac{2n\pi}{3}) = \cos\frac{2n\pi}{3} - \frac{7\sqrt{3}}{3}\sin\frac{2n\pi}{3}$$

$$w_n = \frac{3z_1-1}{z_1-z_2}z_1^n + \frac{3z_2-1}{z_2-z_1}z_2^n = \frac{-5+3i\sqrt{3}}{2i\sqrt{3}}(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2})^n + \frac{-5+3i\sqrt{3}}{-2i\sqrt{3}}(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2})^n =$$

$$= \frac{9+5i\sqrt{3}}{6}(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})^n + \frac{9-5i\sqrt{3}}{6}(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3})^n =$$

$$= \frac{9+5i\sqrt{3}}{6}(\cos\frac{2n\pi}{3} + i\sin\frac{2n\pi}{3}) + \frac{9-5i\sqrt{3}}{6}(\cos\frac{2n\pi}{3} - i\sin\frac{2n\pi}{3}) = 3\cos\frac{2n\pi}{3} - \frac{5\sqrt{3}}{3}\sin\frac{2n\pi}{3}$$

Konačno je:

$$x_n = v_{n-4}\,u_{n-4} + w_{n-6}\,u_{n-6} =$$

$$= \left(\cos\frac{2(n-4)\pi}{3} - \frac{7\sqrt{3}}{3}\sin\frac{2(n-4)\pi}{3}\right)u_{n-4} + \left(3\cos\frac{2(n-6)\pi}{3} - \frac{5\sqrt{3}}{3}\sin\frac{2(n-6)\pi}{3}\right)u_{n-6} =$$

$$= \left(\cos\left(\frac{2n\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{7\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{2n\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right)\right)u_{n-4} + \left(3\cos\frac{2n\pi}{3} - \frac{5\sqrt{3}}{3}\sin\frac{2n\pi}{3}\right)u_{n-6} =$$

$$= \left(\cos\frac{2n\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{2n\pi}{3}\sin\frac{2\pi}{3}\right) - \frac{7\sqrt{3}}{3}\left(\sin\frac{2n\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{3} - \cos\frac{2n\pi}{3}\sin\frac{2\pi}{3}\right)\Big)u_{n-4} +$$

$$+ \left(3\cos\frac{2n\pi}{3} - \frac{5\sqrt{3}}{3}\sin\frac{2n\pi}{3}\right)u_{n-6} =$$

$$= \left(3\cos\frac{2n\pi}{3} + \frac{5\sqrt{3}}{3}\sin\frac{2n\pi}{3}\right)u_{n-4} + \left(3\cos\frac{2n\pi}{3} - \frac{5\sqrt{3}}{3}\sin\frac{2n\pi}{3}\right)u_{n-6} =$$

$$= 3\cos\frac{2n\pi}{3}(u_{n-4} + u_{n-6}) + \frac{5\sqrt{3}}{3}\sin\frac{2n\pi}{3}(u_{n-4} - u_{n-6})$$

Ovo je prihvatljiv oblik izraza za x_n. Međutim, neke stvari se još mogu učiniti na njegovom pojednostavljivanju. Recimo, uočimo li da je $u_{n-4} = \delta_{n-4} + \delta_{n-5} + u_{n-6}$, imamo:

$$x_n = 3\cos\frac{2n\pi}{3}(u_{n-4} + u_{n-6}) + \frac{5\sqrt{3}}{3}\sin\frac{2n\pi}{3}(u_{n-4} - u_{n-6}) =$$

$$= 3\cos\frac{2n\pi}{3}(\delta_{n-4} + \delta_{n-5} + 2u_{n-6}) + \frac{5\sqrt{3}}{3}\sin\frac{2n\pi}{3}(\delta_{n-4} + \delta_{n-5}) =$$

$$= \left(3\cos\frac{2n\pi}{3} + \frac{5\sqrt{3}}{3}\sin\frac{2n\pi}{3}\right)(\delta_{n-4} + \delta_{n-5}) + 6\cos\frac{2n\pi}{3}u_{n-6} =$$

$$= \delta_{n-4} - 4\delta_{n-5} + 6\cos\frac{2n\pi}{3}u_{n-6}$$

Eventualno, možemo doći i do izraza koji ne sadrži trigonometrijske funkcije, ako uočimo da je član sa kosinusom periodičan sa periodom 3, tako da prema pravilu za izražavanje periodičnih sekvenci funkcije "cijeli dio broja" lako možemo dobiti da je (za cjelobrojno n):

$$\cos\frac{2n\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{n-1}{3}\right\rfloor\right)$$

Na osnovu toga je:

$$x_n = \delta_{n-4} - 4\delta_{n-5} + \left[9\left(\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{n-1}{3}\right\rfloor\right) - 3\right]u_{n-6}$$

Interesantno je pokazati još neke načine da se izvede izraz za x_n. Recimo, izraz za $X(z)$ mogli smo rastaviti i ovako:

$$X(z) = \frac{(z-1)^3}{z^5(z^2+z+1)} = \frac{z^3 - 3z^2 + 3z - 1}{z^5(z^2+z+1)} =$$

$$= z^{-3}\frac{z}{z^2+z+1} - 3z^{-4}\frac{z}{z^2+z+1} + 3z^{-5}\frac{z}{z^2+z+1} - z^{-6}\frac{z}{z^2+z+1}$$

Sada, ako uvedemo sekvencu y_n kao

$$y_n = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z^2+z+1}\right\}$$

tada na osnovu pravila z-transformacije slijedi da je

$$x_n = y_{n-3}\, u_{n-3} - 3\, y_{n-4}\, u_{n-4} + 3\, y_{n-5}\, u_{n-5} - y_{n-6}\, u_{n-6}$$

Prednost ovog načina je što je potrebno naći z-transformaciju samo jedne pomoćne sekvence, a nedostatak što se često dobija glomazniji izraz za x_n. Za sekvencu y_n slično kao i dosad imamo:

$$v_n = \frac{1}{z_1 - z_2}\, z_1^n + \frac{1}{z_2 - z_1}\, z_2^n = \frac{1}{i\sqrt{3}} \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \frac{1}{-i\sqrt{3}} \left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right)^n =$$

$$= \frac{-i\sqrt{3}}{3} \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^n + \frac{i\sqrt{3}}{3} \left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^n =$$

$$= \frac{-i\sqrt{3}}{3} \left(\cos\frac{2n\pi}{3} + i\sin\frac{2n\pi}{3}\right) + \frac{i\sqrt{3}}{3} \left(\cos\frac{2n\pi}{3} - i\sin\frac{2n\pi}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\frac{2n\pi}{3}$$

Odavde je:

$$x_n = y_{n-3}\, u_{n-3} + y_{n-4}\, u_{n-4} + y_{n-5}\, u_{n-5} + y_{n-6}\, u_{n-6} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(\sin\frac{2(n-3)\,\pi}{3}\, u_{n-3} - 3\sin\frac{2(n-4)\,\pi}{3}\, u_{n-4} + 3\sin\frac{2(n-5)\,\pi}{3}\, u_{n-5} - \sin\frac{2(n-6)\,\pi}{3}\, u_{n-6}\right)$$

Na prvi pogled ne izgleda da je ovaj izraz ekvivalentan izrazima koje smo ranije imali, ali on to jeste, mada je dosta mučno pokazati njihovu ekvivalenciju (za tu svrhu, trebalo bi se poslužiti trigonometrijskim transformacijama razlike uglova, te izraziti u_{n-3}, u_{n-4} i u_{n-5} preko u_{n-6} i pomjerenih δ-sekvenci), tako da to nećemo pokazivati.

Na kraju, treba još reći da bi mazohistički postupak nalaženja x_n direktnom primjenom formule za inverznu z-transformaciju racionalne funkcije koji zahtijeva nalaženje izvoda petog reda doveo do sljedećeg izraza za x_n:

$$x_n = -6\,(\delta_n + \delta_{n-3}) + 3\,(\delta_{n-1} + \delta_{n-2}) + 4\,\delta_{n-4} - \delta_{n-5} + 6\cos\frac{2\,n\,\pi}{3}$$

Izraz sličan ovome sa istim kosinusnim članom smo već imali ranije, samo što je tada bio prisutan i faktor u_{n-6}. Uloga članova sa δ-sekvencama koji se ovdje javljaju je upravo da kompenziraju nedostatak tog faktora, tako da je i ovaj izraz ekvivalentan svim prethodno izvedenim izrazima.