a) Prema definiciji jednostrane z-transformacije imamo:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sin\frac{n\pi}{2} z^{-n} = \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}(e^{n\pi i/2} - e^{-n\pi i/2})\, z^{-n} =$$

$$= \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(e^{\pi i/2})^n - (e^{-\pi i/2})^n\right] z^{-n} = \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})^n - (\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2})^n\right] z^{-n} =$$

$$= \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}[i^n - (-i)^n]\, z^{-n} = \frac{1}{2i}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{i}{z})^n - \sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{i}{z})^n\right] = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{1-\frac{i}{z}} - \frac{1}{1+\frac{i}{z}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{z}{z-i} - \frac{z}{z+i}\right) = \frac{1}{2i}\left[\frac{z(z+i) - z(z-i)}{(z-i)(z+i)}\right] = \frac{1}{2i}\left(\frac{2iz}{z^2+1}\right) = \frac{z}{z^2+1}$$

Ovdje je iskorištena formula za sumu beskonačnog geometrijskog reda

$$\sum_{n=\mathrm{N}}^{\infty} q^n = \frac{q^{\mathrm{N}}}{1-q}$$

koja vrijedi i za kompleksne vrijednosti q, pod uvjetom $|q| < 1$. To znači da je prethodno izvođenje valjano samo ukoliko je $|i/z| < 1$ i $|-i/z| < 1$, tj. ukoliko je $|z| > |i| = 1$. Međutim, za potrebe primjene jednostrane z-transformacije pitanje konvergencije nije ni od kakvog značaja, tako da se konvergencija korištenih redova obično i ne ispituje.

b) Slično, za ovaj slučaj imamo

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^{-n}$$

Nevolja je što dobijeni red nije baš jednostavan za sumiranje. Jedna od mogućnosti je koristiti tehnike diferenciranja i integriranja iz matematičke analize, sa ciljem da se red svede na red čija je suma poznata (konkretno, na geometrijski red):

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^{-n} = z\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^{-n-1} = z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\int\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^{-n-1}\mathrm{d}z = z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \int z^{-n-1}\mathrm{d}z =$$

$$= -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{n=0}^{\infty} n^2\,\frac{z^{-n}}{n} = -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{n=0}^{\infty} n\, z^{-n} = -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z\sum_{n=0}^{\infty} n\, z^{-n-1}\right] =$$

$$= -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\int\sum_{n=0}^{\infty} n\, z^{-n-1}\mathrm{d}z\right] = -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{n=0}^{\infty} n\int z^{-n-1}\mathrm{d}z\right] = z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{n=0}^{\infty} n\,\frac{z^{-n}}{n}\right] =$$

$$= z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}\right] = z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z}{z-1}\right)\right] = z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z\,\frac{-1}{(z-1)^2}\right] =$$

$$= -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{z}{(z-1)^2}\right] = -z\,\frac{(z-1)^2 - 2z(z-1)}{(z-1)^4} = -z\,\frac{-z-1}{(z-1)^3} = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$

Vidimo da je bilo potrebno izvršiti dva integriranja i dva diferenciranja (uz malo namještanja). Geometrijski red koji smo na kraju dobili konvergira za $|z| > 1$, tako da i dobijeni izraz za X(z) postoji za $|z| > 1$ (diferenciranjem i integriranjem ne mijenja se oblast konvergencije reda).

Do istog rješenja je moguće doći i posve elementarnim putem (tj. bez upotrebe integriranja ili diferenciranja), ali je postupak nešto složeniji i indirektan. Recimo, možemo postupiti ovako:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 z^{-n-1} = z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 z^{-n} =$$

$$= z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^{-n} + 2z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} n z^{-n} + z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = z^{-1}X(z) + 2z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} n z^{-n} + z^{-1}\frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$= z^{-1}X(z) + 2z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} n z^{-n} + \frac{1}{z-1}$$

Ako ovo shvatimo kao jednačinu po nepoznatoj X(z), imamo

$$X(z)\,(1 - z^{-1}) = 2z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} n z^{-n} + \frac{1}{z-1}$$

odakle je

$$X(z) = \frac{2z^{-1}}{1-z^{-1}}\sum_{n=0}^{\infty} n z^{-n} + \frac{1}{(1-z^{-1})(z-1)} = \frac{2}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty} n z^{-n} + \frac{z}{(z-1)^2}$$

Ovim posao još nije gotov, jer ostaje red sa općim članom $n z^{-n}$. Međutim, njega možemo sumirati koristeći identičnu strategiju:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^{-n-1} = z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^{-n} =$$

$$= z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} n z^{-n} + z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} n z^{-n} + z^{-1}\frac{1}{1-z^{-1}} = z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} n z^{-n} + \frac{1}{z-1}$$

Odavde možemo pisati

$$(1-z^{-1})\sum_{n=0}^{\infty} n z^{-n} = \frac{1}{z-1}$$

tako da je

$$\sum_{n=0}^{\infty} n z^{-n} = \frac{1}{(1-z^{-1})(z-1)} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

Konačno je

$$X(z) = \frac{2}{z-1}\cdot\frac{z}{(z-1)^2} + \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z\,(z+1)}{(z-1)^3}$$

c) Kako je $x_n = 0$ za $n < 4$, imamo:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} = \sum_{n=4}^{\infty} 2^n z^{-n} = \sum_{n=4}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = \frac{\left(\frac{2}{z}\right)^4}{1-\frac{2}{z}} = \frac{16}{z^3(z-2)}$$

Ovaj red konvergira za $|2/z| < 1$, odnosno za $|z| > 2$.

d) Za ovaj slučaj imamo:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} = \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ parno}}}^{\infty} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z^2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{z^2}} = \frac{z^2}{z^2-1}$$

Razmatrani red konvergira za $|1/z^2| < 1$, odnosno za $|z| > 1$.

e) Za ovaj slučaj imamo:

$$\mathrm{X}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right)^{2n} = \cos \frac{1}{\sqrt{z}}$$

U ovom izvođenju iskorišten je sljedeći razvoj funkcije cos u stepeni red poznat iz matematičke analize:

$$\cos w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} w^{2n}$$

Ovaj red konvergira za sve kompleksne vrijednosti w. Stoga $\mathrm{X}(z)$ postoji za sve kompleksne vrijednosti z osim za $z = 0$ (jer tada izraz $1/\sqrt{z}$ nije definiran).

f) U ovom slučaju imamo:

$$\mathrm{X}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} z^{-n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n+2} = z^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n =$$

$$= z^2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n - \frac{1}{0!}\left(\frac{1}{z}\right)^0 - \frac{1}{1!}\left(\frac{1}{z}\right)^1\right] = z^2 \left(e^{1/z} - 1 - \frac{1}{z}\right) = z^2 \left(e^{1/z} - 1\right) - z$$

Ovdje je iskorišten poznati razvoj u stepeni red

$$e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}$$

Kako posljednji red također konvergira za sve kompleksne vrijednosti w, $\mathrm{X}(z)$ postoji za sve kompleksne vrijednosti z osim za $z = 0$ (jer tada izraz $1/z$ nije definiran).