Potreban i dovoljan uvjet da linearan i stacionaran diskretni sistem bude opisiv diferentnom jednačinom je da njegova funkcija sistema H(z) bude racionalna funkcija.

a) Za ovaj sistem funkcija sistema glasi:

$$\mathrm{H}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{u_{k-1}}{k} z^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{-k}}{k} =$$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left(-\frac{1}{z}\right)^k = -\ln\left(1-\frac{1}{z}\right) = \ln\frac{z}{z-1} \quad \text{za } |z| > 1$$

Dobijeni izraz za H(z) očigledno nije racionalna funkcija, tako da ovaj sistem nije opisiv nikakvom diferentnom jednačinom. Za izvođenje ovog izraza iskorišten je sljedeći razvoj u stepeni red, koji je dobro poznat iz matematičke analize:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} w^k = \ln(1+w) \quad \text{za} \quad |w| < 1$$

Napomena: Ovdje treba biti na oprezu, s obzirom da je u općem slučaju z kompleksan broj, a dobro poznato svojstvo logaritma

$$\ln\frac{1}{w} = -\ln w$$

koje smo koristili u gornjem izvođenju ne vrijedi uvijek u skupu kompleksnih brojeva. Na primjer, za $w = -1$ lijeva strana gornje "jednakosti" iznosi πi, a desna strana $-\pi i$. Ipak, ova jednakost vrijedi za sve kompleksne brojeve osim za negativne realne brojeve. Sretna okolnost je da zbog uvjeta $|z| > 1$ izraz pod logaritmom u izrazu za H(z) nikada ne može biti negativan realan broj, tako da je gornje izvođenje ispravno.

b) Za ovaj sistem funkcija sistema glasi:

$$\mathrm{H}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k u_k}{k!} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} z^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(-\frac{1}{z}\right)^k = e^{-1/z} \quad \text{za} \quad z \neq 0$$

Ni ovo očigledno nije racionalna funkcija, tako da ni ovaj sistem nije opisiv nikakvom diferentnom jednačinom. Za ovo izvođenje iskorišten je sljedeći poznati razvoj u stepeni red:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!} = e^w$$

Ovaj red konvergira za sve kompleksne vrijednosti w, tako da je funkcija sistema H(z) definirana za sve kompleksne vrijednosti z osim za $z = 0$, jer tada izraz $1/z$ nije definiran.

c) Za ovaj sistem funkcija sistema glasi:

$$\mathrm{H}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} u_k}{k+1} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} z^{-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} z^{-k+1} = -z\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left(\frac{1}{z}\right)^k = -z\ln\left(1+\frac{1}{z}\right) = z\ln\frac{z}{z+1} \quad \text{za } |z| > 1$$

Kako ni ovo nije racionalna funkcija, ni ovaj sistem nije opisiv nikakvom diferentnom jednačinom. Pri izvođenju ovog rezultata, korištene su iste činjenice kao u dijelu zadatka pod a).