

Kako za kauzalne sisteme vrijedi  $h_n = 0$  za  $n < 0$ , to se dvostrano beskonačna suma kojom je definirana funkcija sistema  $H(z)$  svodi na jednostrano beskonačnu sumu, tj. imamo

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^{-k}$$

Odavde imamo

$$H(z^{-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^k$$

Vidimo da izraz za  $H(z^{-1})$  kod kauzalnih sistema ima formu Taylorovog reda. Iz teorije funkcija kompleksne promjenljive poznato je da Taylorov red proizvoljne funkcije  $f(z)$  kompleksne promjenljive  $z$  konvergira u disku oblika  $|z| < r$ , gdje je  $r$  udaljenost najbliže singularne tačke funkcije  $f(z)$  od tačke  $z = 0$  (dokaz ove činjenice nije posve trivijalan i duboko se oslanja na teoriju funkcija kompleksne promjenljive). Dakle, izraz za  $H(z^{-1})$  konvergira za  $|z| < r$ , gdje je  $r$  najmanji među modulima svih singularnih tačaka funkcije  $H(z^{-1})$ . Na osnovu toga, izraz za  $H(z)$  konvergira za  $|z^{-1}| < r$ , odnosno za  $|z| > 1/r$ . Međutim, kako su singularne tačke funkcije  $H(z^{-1})$  očigledno recipročne vrijednosti singularnih tačaka funkcije  $H(z)$ , slijedi da je  $1/r$  najveći među modulima svih singularnih tačaka funkcije  $H(z)$ . Dakle, kod kauzalnih sistema, red kojim je definirana funkcija sistema  $H(z)$  uvijek konvergira u oblasti

$$|z| > R$$

gdje je  $R$  najveći među modulima singularnih tačaka funkcije  $H(z)$ . Drugim riječima, kod kauzalnih sistema se oblast konvergencije reda kojim je definirana funkcija sistema  $H(z)$  može se odrediti iz samog analitičkog izraza za  $H(z)$ .

Odavde direktno slijedi da pretpostavku o kauzalnosti analitički izraz za funkciju sistema jednoznačno određuje sistem, bez potrebe za poznavanjem oblasti konvergencije. Zaista, za kauzalne sisteme oblast konvergencije za  $H(z)$  se može jednoznačno odrediti iz analitičkog izraza za  $H(z)$ , a poznato je da analitički izraz za  $H(z)$  i pripadna oblast konvergencije određuju jednoznačno sistem (koji se, za slučaj kauzalnih sistema, može barem teoretski odrediti razvojem  $H(z^{-1})$  u Taylorov red).

Ovo možemo iskazati i kao tvrdnju da dva različita kauzalna linearna i stacionarna diskretna sistema uvijek imaju različite analitičke izraze za funkciju sistema. Ova činjenica se može lako dokazati i direktno, bez pozivanja na napredne činjenice iz teorije funkcija kompleksne promjenljive. Zaista, neka su data dva različita kauzalna linearna i stacionarna diskretna sistema. Kako su takvi sistemi u potpunosti određeni impulsnim odzivima, oni će tada imati i različite impulsne odzve  $h_n'$  i  $h_n''$ . Pretpostavimo sada suprotno da oba sistema imaju isti analitički izraz za funkciju sistema, tj. da vrijedi

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_k' z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} h_k'' z^{-k} = H(z)$$

Na osnovu prethodno rečenog, oba sistema će tada imati i istu oblast konvergencije  $|z| > R$ . Uvedemo li smjenu  $z = 1/w$ , imamo

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_k' w^k = \sum_{k=0}^{\infty} h_k'' w^k = H(1/w)$$

Gornja jednakost vrijedi za  $|1/w| > R$ , odnosno za  $|w| < 1/R$ . Oduzimanjem slijedi

$$\sum_{k=0}^{\infty} (h_k' - h_k'') w^k = 0 \quad \text{za} \quad |w| < 1/R$$

Kako su po pretpostavci sekvence  $h_n'$  i  $h_n''$  različite, to znači da se njihove vrijednosti razlikuju za barem jednu vrijednost indeksa  $n \geq 0$ . Neka je  $n = N$  najmanja vrijednost indeksa za koju se ove sekvence razlikuju, tj. neka je  $h_n' = h_n''$  za  $n < N$  i  $h_N' \neq h_N''$ . Tada za  $|w| < 1/R$  možemo pisati:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (h_k' - h_k'') w^k &= \sum_{k=N}^{\infty} (h_k' - h_k'') w^k = \sum_{k=0}^{\infty} (h_{k+N}' - h_{k+N}'') w^{k+N} = \\ &= [(h_N' - h_N'') w^N + \sum_{k=1}^{\infty} (h_{k+N}' - h_{k+N}'') w^{k+N}] = w^N [h_N' - h_N'' + \sum_{k=1}^{\infty} (h_{k+N}' - h_{k+N}'') w^k] = 0 \end{aligned}$$

Dakle, za  $|w| < 1/R$  vrijedi  $w^N f(w) = 0$ , gdje smo uveli oznaku

$$f(w) = h_N' - h_N'' + \sum_{k=1}^{\infty} (h_{k+N}' - h_{k+N}'') w^k$$

Kako stepeni red u oblasti konvergencije predstavlja neprekidnu funkciju, to je  $f(w)$  neprekidna funkcija za  $|w| < 1/R$ . Kako je pored toga očigledno  $f(0) = h_N' - h_N'' \neq 0$ , na osnovu neprekidnosti slijedi da u nekoj okolini  $|w| < \varepsilon$  tačke  $w = 0$  vrijedi  $f(w) \neq 0$ . Stoga u istoj okolini također mora vrijediti i relacija  $w^N f(w) \neq 0$ , osim u tački  $w = 0$ . Dakle,  $w^N f(w) \neq 0$  mora vrijediti za  $0 < |w| < \varepsilon$ . Međutim, ovo je u direktnoj kontradikciji sa ranije pokazanom činjenicom da je  $w^N f(w) = 0$  za  $|w| < 1/R$ . Ova kontradikcija pokazuje da je početna pretpostavka da oba sistema imaju isti analitički izraz  $H(z)$  za funkciju sistema neodrživa, tako da oni moraju imati različite analitičke izraze za funkciju sistema, što je i trebalo pokazati.