U pripremnom dijelu zadatka prvo je potrebno naći funkciju sistema H(z) koja će nam kasnije trebati za ostatak zadatka. S obzirom da h_n ima jednostavan oblik, H(z) se jednostavno nalazi po definiciji:

$$\mathrm{H}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{2z})^k = \frac{1}{1-1/(2z)} = \frac{2z}{2z-1}$$

Ovaj red konvergira za $|1/(2z)| < 1$, tj. za $|z| > 1/2$, tako da je H(z) definirana samo za $|z| > 1/2$.

a) Poznato je da za pobude oblika $x_n = z^n$, odziv ima oblik $y_n = z^n \, \mathrm{H}(z)$. Stoga, $z = 2$ imamo

$$y_n = 2^n \, \mathrm{H}(2) = 2^n \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 2 - 1} = \frac{4}{3} 2^n$$

b) Pošto je $x_n = 3^{-n} = (1/3)^n$, imamo $y_n = (1/3)^n \mathrm{H}(1/3)$. Međutim, H(1/3) ne postoji, jer za $z = 1/3$ nije ispunjen uvjet $|z| > 1/2$ (ne treba da nas zavara da je formalni izraz za H(z) definiran i za $z = 1/3$, tako da nam se čini da je $\mathrm{H}(1/3) = -2$), Stoga, odziv sistema na pobudu $x_n = 3^{-n}$ ne postoji. Izlaz sistema divergira (odlazi u beskonačnost) pri ovakvoj pobudi (u stvarnosti, izlaz ne može biti beskonačan, nego je maksimalna vrijednost izlaza ograničena količinom raspoložive energije u sistemu).

Alternativno, kada bismo pokušali naći odziv koristeći diskretnu konvoluciju, dobili bismo red koji divergira, što potvrđuje zaključak. Zaista, imamo

$$y_n = x_n * h_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k h_{n-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k x_{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} h_k x_{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} 3^{k-n} = 3^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{3}{2})^k$$

Red u posljednjem izrazu divergira, jer se radi o beskonačnom geometrijskom redu čiji je količnik veći od 1.

c) Na osnovu linearnosti sistema, ako je odziv sistema na pobudu $x_n = (2/3)^n$ jednak $y_n = (2/3)^n \, \mathrm{H}(2/3)$, tada je odziv na pobudu $x_n = 4\,(2/3)^n$ jednak

$$y_n = 4\,(\frac{2}{3})^n \, \mathrm{H}(\frac{2}{3}) = 4\,(\frac{2}{3})^n \frac{2 \cdot (2/3)}{2 \cdot (2/3) - 1} = 16\,(\frac{2}{3})^n$$

d) Iz Euler-Moievrovog obrasca prema kojem je $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$ slijedi $\sin\varphi = (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})/2i$. Ovo omogućava da se pobuda $x_n = \sin(n\pi/3)$ izrazi kao linearna kombinacija pobuda oblika z^n:

$$x_n = \sin\frac{n\pi}{3} = \frac{1}{2i}(e^{n\pi i/3} - e^{-n\pi i/3}) = \frac{1}{2i}(e^{\pi i/3})^n - \frac{1}{2i}(e^{-\pi i/3})^n$$

Sada se može iskoristiti činjenica da je sistem linearan. U računu koji slijedi, postupak se može osjetno skratiti ukoliko se iskoristi činjenica da je $(z - \bar{z})/2i = \mathrm{Im}\, z$:

$$y_n = \frac{1}{2i}(e^{\pi i/3})^n \, \mathrm{H}(e^{\pi i/3}) - \frac{1}{2i}(e^{-\pi i/3})^n \, \mathrm{H}(e^{-\pi i/3}) = \frac{1}{2i}\left(e^{n\pi i/3}\mathrm{H}(e^{\pi i/3}) - e^{-n\pi i/3}\mathrm{H}(e^{-\pi i/3})\right) =$$

$$= \mathrm{Im}\left(e^{n\pi i/3}\mathrm{H}(e^{\pi i/3})\right) = \mathrm{Im}\left(e^{n\pi i/3}\frac{2e^{\pi i/3}}{2e^{\pi i/3}-1}\right) = \mathrm{Im}\left((\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3})\frac{2e^{\pi i/3}}{2e^{\pi i/3}-1}\right) =$$

$$= \mathrm{Im}\left((\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3})\frac{2\cos(\pi/3) + 2i\sin(\pi/3)}{2\cos(\pi/3) - 1 + 2i\sin(\pi/3)}\right) = \mathrm{Im}\left((\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3})\frac{1 + i\sqrt{3}}{i\sqrt{3}}\right) =$$

$$= \operatorname{Im}\left((\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3})\frac{1+i\sqrt{3}}{i\sqrt{3}}\frac{i\sqrt{3}}{i\sqrt{3}}\right) = \operatorname{Im}\left((\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3})\frac{-3+i\sqrt{3}}{-3}\right) =$$

$$= \operatorname{Im}\left((\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3})(1-\frac{i\sqrt{3}}{3})\right) = \sin\frac{n\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\frac{n\pi}{3}$$

Ovo je prihvatljiv rezultat, s obzirom da smo se oslobodili imaginarne jedinice. Međutim, dobijeni izraz za y_n se može još malo pojednostaviti, koristeći elementarne trigonometrijske transformacije:

$$y_n = \sin\frac{n\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\frac{n\pi}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{n\pi}{3}-\frac{1}{2}\cos\frac{n\pi}{3}) =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}(\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{n\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{n\pi}{3}) = -\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\frac{(n+1)\pi}{3}$$

Treba još istaknuti da $H(e^{\pi i/3})$ i $H(e^{-\pi i/3})$ zaista postoje, jer je $|e^{\pi i/3}| = |e^{-\pi i/3}| = 1 > 1/2$.

e) Kako je $\cos n\pi = (-1)^n$ za $n \in \mathbb{Z}$, to je

$$y_n = (-1)^n H(-1) = (-1)^n \frac{2\cdot(-1)}{2\cdot(-1)-1} = \frac{2}{3}(-1)^n$$

f) Na osnovu linearnosti sistema, odziv sistema na pobudu $x_n = \sin(n\pi/3)+\cos(n\pi/2)$ jednak je zbiru odziva na pobude $x'_n = \sin(n\pi/3)$ i $x''_n = \cos(n\pi/2)$. Odziv y'_n na pobudu x'_n smo računali pod d). Odziv y''_n na pobudu x''_n računa se na sličan način, tako što se pomoću Euler-Moivreovog obrasca iz kojeg slijedi $\cos\varphi = (e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})/2$ ova pobuda prikaže kao linearna kombinacija pobuda oblika z^n:

$$x''_n = \cos\frac{n\pi}{2} = \frac{1}{2}(e^{n\pi i/2}+e^{-n\pi i/2}) = \frac{1}{2}(e^{\pi i/2})^n+\frac{1}{2}(e^{-\pi i/2})^n$$

Sada se za nalaženje odziva na ovu pobudu može iskoristiti činjenica da je sistem linearan. Za skraćivanje postupka, može se iskoristi činjenica da je $(z-\overline{z})/2 = \operatorname{Re} z$:

$$y''_n = \frac{1}{2}(e^{\pi i/2})^n H(e^{\pi i/2})+\frac{1}{2}(e^{-\pi i/2})^n H(e^{-\pi i/2}) = \frac{1}{2}\left(e^{n\pi i/2}H(e^{\pi i/2})+e^{-n\pi i/2}H(e^{-\pi i/2})\right) =$$

$$= \operatorname{Re}\left(e^{n\pi i/2}H(e^{\pi i/2})\right) = \operatorname{Re}\left(e^{n\pi i/2}\frac{2e^{\pi i/2}}{2e^{\pi i/2}-1}\right) = \operatorname{Re}\left((\cos\frac{n\pi}{2}+i\sin\frac{n\pi}{2})\frac{2e^{\pi i/2}}{2e^{\pi i/2}-1}\right) =$$

$$= \operatorname{Re}\left((\cos\frac{n\pi}{2}+i\sin\frac{n\pi}{2})\frac{2\cos(\pi/2)+2i\sin(\pi/2)}{2\cos(\pi/2)-1+2i\sin(\pi/2)}\right) = \operatorname{Re}\left((\cos\frac{n\pi}{2}+i\sin\frac{n\pi}{2})\frac{2i}{-1+2i}\right) =$$

$$= \operatorname{Re}\left((\cos\frac{n\pi}{2}-i\sin\frac{n\pi}{2})\frac{2i}{-1+2i}\frac{-1-2i}{-1-2i}\right) = \operatorname{Re}\left((\cos\frac{n\pi}{2}+i\sin\frac{n\pi}{2})\frac{4-2i}{5}\right) =$$

$$= \operatorname{Im}\left((\cos\frac{n\pi}{2}+i\sin\frac{n\pi}{2})(\frac{4}{5}-\frac{2}{5}i)\right) = \frac{4}{5}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{2}{5}\sin\frac{n\pi}{2}$$

Ovaj izraz nije pogodan za dalje pojednostavljivanje. Konačno imamo:

$$y_n = y'_n+y''_n = \frac{4}{5}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{2}{5}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\frac{(n+1)\pi}{3}$$

g) Pobudu $x_n = 2^n \sin(n\pi/3)$ možemo na sličan način kao pod d) izraziti kao linearnu kombinaciju pobuda oblika z^n:

$$x_n = 2^n \sin\frac{n\pi}{3} = 2^n \frac{1}{2i}(e^{n\pi i/3} - e^{-n\pi i/3}) = \frac{1}{2i}(2e^{\pi i/3})^n - \frac{1}{2i}(2e^{-\pi i/3})^n$$

Dalje, nastavljamo kao pod d), tako da je odziv jednak:

$$y_n = \frac{1}{2i}(2e^{\pi i/3})^n \,\mathrm{H}(2e^{\pi i/3}) - \frac{1}{2i}(2e^{-\pi i/3})^n \,\mathrm{H}(2e^{-\pi i/3}) =$$

$$= \frac{1}{2i}\left(2^n e^{n\pi i/3}\mathrm{H}(2e^{\pi i/3}) - 2^n e^{-n\pi i/3}\mathrm{H}(2e^{-\pi i/3})\right) = \mathrm{Im}\left(2^n e^{n\pi i/3}\mathrm{H}(2e^{\pi i/3})\right) =$$

$$= \mathrm{Im}\left(2^n e^{n\pi i/3}\frac{4e^{\pi i/3}}{4e^{\pi i/3}-1}\right) = \mathrm{Im}\left(2^n (\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3})\frac{4e^{\pi i/3}}{4e^{\pi i/3}-1}\right) =$$

$$= \mathrm{Im}\left(2^n (\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3})\frac{4\cos(\pi/3) + 4i\sin(\pi/3)}{4\cos(\pi/3) - 1 + 4i\sin(\pi/3)}\right) = \mathrm{Im}\left(2^n (\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3})\frac{2+2i\sqrt{3}}{1+2i\sqrt{3}}\right) =$$

$$= \mathrm{Im}\left(2^n (\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3})\frac{2+2i\sqrt{3}}{1+2i\sqrt{3}}\,\frac{1-2i\sqrt{3}}{1-2i\sqrt{3}}\right) = \mathrm{Im}\left(2^n (\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3})\frac{14-2i\sqrt{3}}{13}\right) =$$

$$= \frac{2^{n+1}}{13}\,\mathrm{Im}\left((\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3})(7 - i\sqrt{3})\right) = \frac{2^{n+1}}{13}(7\sin\frac{n\pi}{3} - \sqrt{3}\cos\frac{n\pi}{3})$$

h) Pobuda $x_n = \sin(n\pi/3)\cos(n\pi/3)$ se također može izraziti kao linearna kombinacija pobuda oblika z^n. To se može uraditi recimo tako što se prvo $\sin(n\pi/3)$ i $\cos(n\pi/3)$ izraze u takvom obliku, a nakon toga izvrši množenje:

$$x_n = \sin\frac{n\pi}{3}\cos\frac{n\pi}{2} = \frac{1}{2i}(e^{n\pi i/3} - e^{-n\pi i/3}) \cdot \frac{1}{2}(e^{n\pi i/2} + e^{-n\pi i/2}) =$$

$$= \frac{1}{4i}(e^{n\pi i/3 + n\pi i/2} + e^{n\pi i/3 - n\pi i/2} - e^{-n\pi i/3 + n\pi i/2} - e^{-n\pi i/3 - n\pi i/2}) =$$

$$= \frac{1}{4i}(e^{5n\pi i/6} + e^{-n\pi i/6} - e^{n\pi i/6} - e^{-5n\pi i/6}) =$$

$$= \frac{1}{4i}(e^{5\pi i/6})^n - \frac{1}{4i}(e^{-5\pi i/6})^n - \frac{1}{4i}(e^{\pi i/6})^n + \frac{1}{4i}(e^{-\pi i/6})^n$$

Alternativno, do istog zaključka mogli bismo doći ukoliko bismo prvo primijenili trigonometrijsku transformaciju $\sin\alpha\cos\beta = [\sin(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+\beta)]/2$, a zatim transformisali tako modificirani izraz. U svakom slučaju, na osnovu linearnosti sistema dalje imamo:

$$y_n = \frac{1}{4i}(e^{5\pi i/6})^n \,\mathrm{H}(e^{5\pi i/6}) - \frac{1}{4i}(e^{-5\pi i/6})^n \,\mathrm{H}(e^{-5\pi i/6}) - \frac{1}{4i}(e^{\pi i/6})^n \,\mathrm{H}(e^{\pi i/6}) + \frac{1}{4i}(e^{-\pi i/6})^n \,\mathrm{H}(e^{-\pi i/6}) =$$

$$= \frac{1}{4i}\left(e^{5n\pi i/6}\mathrm{H}(e^{5\pi i/6}) - e^{-5n\pi i/6}\mathrm{H}(e^{-5\pi i/6}) - e^{n\pi i/6}\mathrm{H}(e^{\pi i/6}) + e^{-n\pi i/6}\mathrm{H}(e^{-\pi i/6})\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left(e^{5n\pi i/6}\mathrm{H}(e^{5\pi i/6}) - e^{n\pi i/6}\mathrm{H}(e^{\pi i/6})\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left(e^{5n\pi i/6}\frac{2e^{5\pi i/6}}{2e^{5\pi i/6}-1} - e^{n\pi i/6}\frac{2e^{\pi i/6}}{2e^{\pi i/6}-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left((\cos\frac{5n\pi}{6} + i\sin\frac{5n\pi}{6})\frac{2e^{5\pi i/6}}{2e^{5\pi i/6}-1} - (\cos\frac{n\pi}{6} + i\sin\frac{n\pi}{6})\frac{2e^{\pi i/6}}{2e^{\pi i/6}-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\Big((\cos\frac{5n\pi}{6}+i\sin\frac{5n\pi}{6})\frac{2\cos(5\pi/6)+2i\sin(5\pi/6)}{2\cos(5\pi/6)-1+2i\sin(5\pi/6)}-$$

$$-(\cos\frac{n\pi}{6}+i\sin\frac{n\pi}{6})\frac{2\cos(\pi/6)+2i\sin(\pi/6)}{2\cos(\pi/6)-1+2i\sin(\pi/6)}\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\Big((\cos\frac{5n\pi}{6}+i\sin\frac{5n\pi}{6})\frac{-\sqrt{3}+i}{-\sqrt{3}-1+i}-(\cos\frac{n\pi}{6}+i\sin\frac{n\pi}{6})\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-1+i}\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\Big((\cos\frac{5n\pi}{6}+i\sin\frac{5n\pi}{6})\frac{-\sqrt{3}+i}{-\sqrt{3}-1+i}\,\frac{\sqrt{3}+1+i}{\sqrt{3}+1+i}-(\cos\frac{n\pi}{6}+i\sin\frac{n\pi}{6})\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-1+i}\,\frac{\sqrt{3}-1-i}{\sqrt{3}-1-i}\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\Big((\cos\frac{5n\pi}{6}+i\sin\frac{5n\pi}{6})\frac{-4-\sqrt{3}+i}{-5-2\sqrt{3}}-(\cos\frac{n\pi}{6}+i\sin\frac{n\pi}{6})\frac{4-\sqrt{3}-i}{5-2\sqrt{3}}\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\Big((\cos\frac{5n\pi}{6}+i\sin\frac{5n\pi}{6})\frac{4+\sqrt{3}-i}{5+2\sqrt{3}}\,\frac{5-2\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}}-(\cos\frac{n\pi}{6}+i\sin\frac{n\pi}{6})\frac{4-\sqrt{3}-i}{5-2\sqrt{3}}\,\frac{5+2\sqrt{3}}{5+2\sqrt{3}}\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\Big((\cos\frac{5n\pi}{6}+i\sin\frac{5n\pi}{6})\frac{14-3\sqrt{3}-i(5-2\sqrt{3})}{13}-(\cos\frac{n\pi}{6}+i\sin\frac{n\pi}{6})\frac{14+3\sqrt{3}-i(5+2\sqrt{3})}{13}\Big) =$$

$$= \frac{14-3\sqrt{3}}{26}\sin\frac{5n\pi}{6}-\frac{5-2\sqrt{3}}{26}\cos\frac{5n\pi}{6}-\frac{14+3\sqrt{3}}{26}\sin\frac{n\pi}{6}+\frac{5+2\sqrt{3}}{26}\cos\frac{n\pi}{6}$$

Dobijeni izraz se može prikazati u još nekoliko ekvivalentnih oblika korištenjem raznih trigonometrijskih transformacija, ali njegovo bitnije pojednostavljivanje nije moguće.

i) Pobudu $x_n = \sin(n\pi/3+\pi/4)$ možemo izraziti kao linearnu kombinaciju pobuda oblika z^n na sličan način kao pod d):

$$x_n = \sin(\frac{n\pi}{3}+\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2i}(e^{n\pi i/3+\pi i/4}-e^{-n\pi i/3-\pi i/4}) = \frac{1}{2i}e^{\pi i/4}(e^{\pi i/3})^n-\frac{1}{2i}e^{-\pi i/4}(e^{-\pi i/3})^n$$

Dalje, na osnovu linearnosti sistema, možemo nastaviti recimo ovako:

$$y_n = \frac{1}{2i}e^{\pi i/4}(e^{\pi i/3})^n\,\mathrm{H}(e^{\pi i/3})-\frac{1}{2i}e^{-\pi i/3}(e^{-\pi i/3})^n\,\mathrm{H}(e^{-\pi i/3}) =$$

$$= \frac{1}{2i}\Big(e^{n\pi i/3}e^{\pi i/4}\mathrm{H}(e^{\pi i/3})-e^{-n\pi i/3}e^{-\pi i/4}\mathrm{H}(e^{-\pi i/3})\Big) = \operatorname{Im}\Big(e^{(n\pi/3+\pi/4)i}\mathrm{H}(e^{\pi i/3})\Big) =$$

$$= \operatorname{Im}\Big(e^{(n\pi/3+\pi/4)i}\frac{2e^{\pi i/3}}{2e^{\pi i/3}-1}\Big) = \operatorname{Im}\Big((\cos(\frac{n\pi}{3}+\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{n\pi}{3}+\frac{\pi}{4}))\frac{2e^{\pi i/3}}{2e^{\pi i/3}-1}\Big) =$$

$$= \operatorname{Im}\Big((\cos\frac{(4n+3)\pi}{12}+i\sin\frac{(4n+3)\pi}{12})\frac{2\cos(\pi/3)+2i\sin(\pi/3)}{2\cos(\pi/3)-1+2i\sin(\pi/3)}\Big) =$$

$$= \operatorname{Im}\Big((\cos\frac{(4n+3)\pi}{12}+i\sin\frac{(4n+3)\pi}{12})\frac{1+i\sqrt{3}}{i\sqrt{3}}\Big) =$$

$$= \operatorname{Im}\Big((\cos\frac{(4n+3)\pi}{12}+i\sin\frac{(4n+3)\pi}{12})\frac{1+i\sqrt{3}}{i\sqrt{3}}\,\frac{i\sqrt{3}}{i\sqrt{3}}\Big) =$$

$$= \operatorname{Im}\Big((\cos\frac{(4n+3)\pi}{12}+i\sin\frac{(4n+3)\pi}{12})\frac{-3+i\sqrt{3}}{-3}\Big) =$$

$$= \operatorname{Im}\Big((\cos\frac{(4n+3)\pi}{12}+i\sin\frac{(4n+3)\pi}{12})(1-\frac{i\sqrt{3}}{3})\Big) = \sin\frac{(4n+3)\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\frac{(4n+3)\pi}{12}$$

Dobijeni izraz može se dodatno pojednostaviti na sličan način kao pod d):

$$y_n = \sin\frac{(4n+3)\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{3}\cos\frac{(4n+3)\pi}{12} = \frac{2\sqrt{3}}{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{(4n+3)\pi}{12} - \frac{1}{2}\cos\frac{(4n+3)\pi}{12}) =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}(\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{(4n+3)\pi}{12} - \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{(4n+3)\pi}{12}) =$$

$$= -\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos(\frac{(4n+3)\pi}{12} + \frac{\pi}{3}) = -\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\frac{(4n+7)\pi}{12}$$

Treba napomenuti da oblik dobijenog rezultata može osjetno ovisiti od toka samog postupka (naravno, svi dobijeni oblici međusobno su ekvivalentni). Recimo, nakon što smo izrazili x_n kao linearnu kombinaciju pobuda oblika z^n, mogli smo nastaviti recimo ovako:

$$y_n = \frac{1}{2i}e^{\pi i/4}(e^{\pi i/3})^n \mathrm{H}(e^{\pi i/3}) - \frac{1}{2i}e^{-\pi i/3}(e^{-\pi i/3})^n \mathrm{H}(e^{-\pi i/3}) =$$

$$= \frac{1}{2i}\left(e^{n\pi i/3}e^{\pi i/4}\mathrm{H}(e^{\pi i/3}) - e^{-n\pi i/3}e^{-\pi i/4}\mathrm{H}(e^{-\pi i/3})\right) = \mathrm{Im}\left(e^{n\pi i/3}e^{\pi i/4}\mathrm{H}(e^{\pi i/3})\right) =$$

$$= \mathrm{Im}\left(e^{n\pi i/3}e^{\pi i/4}\frac{2e^{\pi i/3}}{2e^{\pi i/3}-1}\right) = \mathrm{Im}\left((\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3})(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})\frac{2e^{\pi i/3}}{2e^{\pi i/3}-1}\right) =$$

$$= \mathrm{Im}\left((\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3})(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})\frac{2\cos(\pi/3)+2i\sin(\pi/3)}{2\cos(\pi/3)-1+2i\sin(\pi/3)}\right) =$$

$$= \mathrm{Im}\left((\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3})(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})\frac{1+i\sqrt{3}}{i\sqrt{3}}\right) =$$

$$= \mathrm{Im}\left((\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3})(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})\frac{1+i\sqrt{3}}{i\sqrt{3}}\frac{i\sqrt{3}}{i\sqrt{3}}\right) =$$

$$= \mathrm{Im}\left((\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3})(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})\frac{-3+i\sqrt{3}}{-3}\right) =$$

$$= \mathrm{Im}\left((\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3})(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})(1-\frac{i\sqrt{3}}{3})\right) =$$

$$= \mathrm{Im}\left((\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3})(\frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{3})}{6}+i\frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{3})}{6})\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{3})}{6}\cos\frac{n\pi}{3} + \frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{3})}{6}\sin\frac{n\pi}{3}$$

Dobijeni oblik je interesantan sa aspekta da se u njemu kao argumenti trigonometrijskih funkcija javljaju najprostiji argumenti u odnosu na prethodno dobijene izraze. Međutim, ovako dobijeni izraz je dosta teško dalje pojednostaviti, odnosno za njegovo dalje pojednostavljivanje potrebna je prilična vještina. To bi se moglo izvesti recimo ovako:

$$y_n = \frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{3})}{6}\cos\frac{n\pi}{3} + \frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{3})}{6}\sin\frac{n\pi}{3} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{n\pi}{3}+\sin\frac{n\pi}{3}) + \frac{\sqrt{6}}{6}(\sin\frac{n\pi}{3} - \cos\frac{n\pi}{3}) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{n\pi}{3}+\cos(\frac{n\pi}{3}-\frac{\pi}{2})) + \frac{\sqrt{6}}{6}(\sin\frac{n\pi}{3}+\sin(\frac{n\pi}{3}-\frac{\pi}{2})) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} 2\cos\frac{\pi}{4}\cos(\frac{n\pi}{3}-\frac{\pi}{4}) + \frac{\sqrt{6}}{6} 2\cos\frac{\pi}{4}\sin(\frac{n\pi}{3}-\frac{\pi}{4}) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} 2 \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{(4n-3)\pi}{12} + \frac{\sqrt{6}}{6} 2 \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{(4n-3)\pi}{12} =$$

$$= \cos\frac{(4n-3)\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{(4n-3)\pi}{12} = \frac{2\sqrt{3}}{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{(4n-3)\pi}{12} + \frac{1}{2}\sin\frac{(4n-3)\pi}{12}) =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}(\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{(4n-3)\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{(4n+3)\pi}{12}) =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin(\frac{(4n-3)\pi}{12}+\frac{\pi}{3}) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\frac{(4n+1)\pi}{12}$$

Dobijeni izraz je neznatno različit od izraza koji smo dobili prvim postupkom, ali posve je lako uvidjeti da su oni ekvivalentni.

j) U ovom slučaju, pobuda x_n jednaka je linearnoj kombinaciji pobuda $x'_n = 2^n$ i $x''_n = \sin(n\pi/3)$, tačnije imamo $x_n = x'_n + 3x''_n$. Odziv y'_n na pobudu x'_n računali smo pod a), a odziv y''_n na pobudu x''_n računalu smo pod d). Stoga je:

$$y_n = y'_n + 3y''_n = \frac{4}{3}2^n - 2\sqrt{3}\cos\frac{(n+1)\pi}{3}$$

k) Pobudu $x_n = (-1)^n \cos(n\pi/3)$ ćemo prikazati kao linearnu kombinaciju pobuda oblika z^n koristeći relaciju $\cos\varphi = (e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})/2$, kao i činjenicu da je $-1 = e^{\pi i} = e^{-\pi i}$:

$$x_n = (-1)^n\cos\frac{n\pi}{3} = (e^{\pi i})^n\frac{1}{2}(e^{n\pi i/3}+e^{-n\pi i/3}) = \frac{1}{2}(e^{\pi i})^n(e^{\pi i/3})^n + \frac{1}{2}(e^{-\pi i})^n(e^{-\pi i/3})^n =$$

$$= \frac{1}{2}(e^{\pi i}e^{\pi i/3})^n + \frac{1}{2}(e^{-\pi i}e^{-\pi i/3})^n = \frac{1}{2}(e^{4\pi i/3})^n + \frac{1}{2}(e^{-4\pi i/3})^n$$

Dalje možemo postupiti slično kao pod f):

$$y_n = \frac{1}{2}(e^{4\pi i/3})^n \mathrm{H}(e^{4\pi i/3}) + \frac{1}{2}(e^{-4\pi i/3})^n \mathrm{H}(e^{-4\pi i/3}) = \frac{1}{2}\left(e^{4n\pi i/3}\mathrm{H}(e^{4\pi i/3}) + e^{-4n\pi i/3}\mathrm{H}(e^{-4\pi i/3})\right) =$$

$$= \mathrm{Re}\left(e^{4n\pi i/3}\mathrm{H}(e^{4\pi i/3})\right) = \mathrm{Re}\left(e^{4n\pi i/3}\frac{2e^{4\pi i/3}}{2e^{4\pi i/3}-1}\right) = \mathrm{Re}\left((\cos\frac{4n\pi}{3}+i\sin\frac{4n\pi}{3})\frac{2e^{4\pi i/3}}{2e^{4\pi i/3}-1}\right) =$$

$$= \mathrm{Re}\left((\cos\frac{4n\pi}{3}+i\sin\frac{4n\pi}{3})\frac{2\cos(4\pi/3)+2i\sin(4\pi/3)}{2\cos(4\pi/3)-1+2i\sin(4\pi/3)}\right) =$$

$$= \mathrm{Re}\left((\cos\frac{4n\pi}{3}+i\sin\frac{4n\pi}{3})\frac{-1-i\sqrt{3}}{-2-i\sqrt{3}}\right) = \mathrm{Re}\left((\cos\frac{4n\pi}{3}+i\sin\frac{4n\pi}{3})\frac{1+i\sqrt{3}}{2+i\sqrt{3}}\frac{2-i\sqrt{3}}{2-i\sqrt{3}}\right) =$$

$$= \mathrm{Re}\left((\cos\frac{4n\pi}{3}+i\sin\frac{4n\pi}{3})\frac{5+i\sqrt{3}}{7}\right) = \frac{5}{7}\cos\frac{4n\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{7}\sin\frac{4n\pi}{3}$$

Ovaj izraz nije pogodan za dalje pojednostavljivanje. Međutim, u ovom izrazu javljaju se periodične komponente sa frekvencijom $\Omega = 4\pi/3$. S druge strane, poznato je da se svaki periodični digitalni signal može napisati u obliku u kojem se javljaju samo frekvencije u opsegu od 0 do π. Takvu transformaciju je lako izvesti, s obzirom da je n cijeli broj, a funkcije sin i cos su periodične sa periodom 2π:

$$\frac{5}{7}\cos\frac{4n\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{7}\sin\frac{4n\pi}{3} = \frac{5}{7}\cos\left(\frac{4n\pi}{3}-2n\pi\right)-\frac{\sqrt{3}}{7}\sin\left(\frac{4n\pi}{3}-2n\pi\right) =$$

$$= \frac{5}{7}\cos\left(-\frac{2n\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{7}\sin\left(-\frac{2n\pi}{3}\right) = \frac{5}{7}\cos\frac{2n\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{7}\sin\frac{2n\pi}{3}$$

Alternativno, da na početku nismo uočili činjenicu da je $-1 = e^{\pi i} = e^{-\pi i}$, izraz za x_n mogli smo prikazati ovako:

$$x_n = (-1)^n\cos\frac{n\pi}{3} = (-1)^n\,\frac{1}{2}\left(e^{n\pi i/3}+e^{-n\pi i/3}\right) = \frac{1}{2}\left(-e^{\pi i/3}\right)^n+\frac{1}{2}\left(-e^{-\pi i/3}\right)^n$$

Dalje možemo nastaviti recimo ovako:

$$y_n = \frac{1}{2}\left(-e^{\pi i/3}\right)^n \mathrm{H}\left(-e^{\pi i/3}\right)+\frac{1}{2}\left(-e^{-\pi i/3}\right)^n \mathrm{H}\left(-e^{-\pi i/3}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big((-1)^n e^{n\pi i/3}\mathrm{H}\left(-e^{\pi i/3}\right)+(-1)^n e^{-n\pi i/3}\mathrm{H}\left(-e^{-\pi i/3}\right)\Big) = \mathrm{Re}\Big((-1)^n e^{n\pi i/3}\mathrm{H}\left(-e^{\pi i/3}\right)\Big) =$$

$$= \mathrm{Re}\Big((-1)^n e^{n\pi i/3}\,\frac{-2e^{\pi i/3}}{-2e^{\pi i/3}-1}\Big) = \mathrm{Re}\Big((-1)^n\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}\right)\frac{-2e^{\pi i/3}}{-2e^{\pi i/3}-1}\Big) =$$

$$= \mathrm{Re}\Big((-1)^n\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}\right)\frac{-2\cos(\pi/3)-2i\sin(\pi/3)}{-2\cos(\pi/3)-1-2i\sin(\pi/3)}\Big) =$$

$$= \mathrm{Re}\Big((-1)^n\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}\right)\frac{-1-i\sqrt{3}}{-2-i\sqrt{3}}\Big) = \mathrm{Re}\Big((-1)^n\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}\right)\frac{1+i\sqrt{3}}{2+i\sqrt{3}}\,\frac{2-i\sqrt{3}}{2-i\sqrt{3}}\Big) =$$

$$= \mathrm{Re}\Big((-1)^n\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}\right)\frac{5+i\sqrt{3}}{7}\Big) = (-1)^n\left(\frac{5}{7}\cos\frac{n\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{7}\sin\frac{n\pi}{3}\right)$$

Ovaj izraz može se svesti na oblik koji je dobijen na prvi način ukoliko se iskoristi činjenica da je $(-1)^n = \cos n\pi$:

$$(-1)^n\left(\frac{5}{7}\cos\frac{n\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{7}\sin\frac{n\pi}{3}\right) = \cos n\pi\left(\frac{5}{7}\cos\frac{n\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{7}\sin\frac{n\pi}{3}\right) =$$

$$= \frac{5}{7}\cos n\pi\cos\frac{n\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{7}\cos n\pi\sin\frac{n\pi}{3} =$$

$$= \frac{5}{7}\cdot\frac{1}{2}\Big(\cos\left(n\pi+\frac{n\pi}{3}\right)+\cos\left(n\pi-\frac{n\pi}{3}\right)\Big)-\frac{\sqrt{3}}{7}\cdot\frac{1}{2}\Big(\sin\left(n\pi+\frac{n\pi}{3}\right)-\sin\left(n\pi-\frac{n\pi}{3}\right)\Big) =$$

$$= \frac{5}{7}\cdot\frac{1}{2}\left(\cos\frac{4n\pi}{3}+\cos\frac{2n\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{7}\cdot\frac{1}{2}\left(\sin\frac{4n\pi}{3}-\sin\frac{2n\pi}{3}\right) =$$

$$= \frac{5}{7}\cdot\frac{1}{2}\Big(\cos\left(\frac{4n\pi}{3}-2n\pi\right)+\cos\frac{2n\pi}{3}\Big)-\frac{\sqrt{3}}{7}\cdot\frac{1}{2}\Big(\sin\left(\frac{4n\pi}{3}-2n\pi\right)-\sin\frac{2n\pi}{3}\Big) =$$

$$= \frac{5}{7}\cdot\frac{1}{2}\Big(\cos\left(-\frac{2n\pi}{3}\right)+\cos\frac{2n\pi}{3}\Big)-\frac{\sqrt{3}}{7}\cdot\frac{1}{2}\Big(\sin\left(-\frac{2n\pi}{3}\right)-\sin\frac{2n\pi}{3}\Big) =$$

$$= \frac{5}{7}\cdot\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2n\pi}{3}+\cos\frac{2n\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{7}\cdot\frac{1}{2}\left(-\sin\frac{2n\pi}{3}-\sin\frac{2n\pi}{3}\right) =$$

$$= \frac{5}{7}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cos\frac{2n\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{7}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-2\sin\frac{2n\pi}{3}\right) = \frac{5}{7}\cos\frac{2n\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{7}\sin\frac{2n\pi}{3}$$

l) Pobuda $x_n = \sin^3(n\pi/3)$ se također može lako prikazati kao linearna kombinacija pobuda oblika z^n:

$$x_n = \sin^3\frac{n\pi}{3} = \Big(\frac{1}{2i}(e^{n\pi i/3} - e^{-n\pi i/3})\Big)^3 = \frac{1}{-8i}(e^{n\pi i/3} - e^{-n\pi i/3})^3 =$$
$$= -\frac{1}{8i}(e^{n\pi i} - 3e^{2n\pi i/3}e^{-n\pi i/3} + 3e^{n\pi i/3}e^{-2n\pi i/3} - e^{-n\pi i}) =$$
$$= -\frac{1}{8i}\big((-1)^n - 3e^{n\pi i/3} + 3e^{-n\pi i/3} - (-1)^n\big) = \frac{3}{8i}(e^{n\pi i/3} - e^{-n\pi i/3})$$

Ovdje je iskorištena činjenica da za cjelobrojne vrijednosti n vrijedi $e^{n\pi i} = e^{-n\pi i} = (-1)^n$. Odavde vidimo da za cjelobrojne vrijednosti n zapravo vrijedi $\sin^3(n\pi/3) = (3/4)\sin(n\pi/3)$. Kako smo odziv na pobudu oblika $\sin(n\pi/3)$ računali pod d), na osnovu linearnosti slijedi da je odziv na pobudu $\sin^3(n\pi/3)$ jednak 3/4 tog odziva, odnosno imamo

$$y_n = \frac{3}{4}\cdot -\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\frac{(n+1)\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{(n+1)\pi}{3}$$