

Zamijenimo li  $x_n$  sa  $\delta_n$  a  $y_n$  sa  $h_n$ , diferentna jednačina dobija oblik  $h_n + 5h_{n-1} + 6h_{n-2} = \delta_n$ . Probajmo prvo da vidimo dokle bi nas doveo rekurzivni postupak. Iz ove diferentne jednačine imamo

$$h_n = \delta_n - 5h_{n-1} - 6h_{n-2}$$

Na osnovu pretpostavljene kauzalnosti sistema imamo  $h_n = 0$  za  $n < 0$ , tako da je

$$\begin{aligned} h_0 &= \delta_0 - 5h_{-1} - 6h_{-2} = 1 - 5 \cdot 0 - 6 \cdot 0 = 1 \\ h_1 &= \delta_1 - 5h_0 - 6h_{-1} = 0 - 5 \cdot 1 - 6 \cdot 0 = -5 \\ h_2 &= \delta_2 - 5h_1 - 6h_0 = 0 - 5 \cdot (-5) - 6 \cdot 1 = 19 \\ h_3 &= \delta_3 - 5h_2 - 6h_1 = 0 - 5 \cdot 19 - 6 \cdot (-5) = -65 \\ h_4 &= \delta_4 - 5h_3 - 6h_2 = 0 - 5 \cdot (-65) - 6 \cdot 19 = 211 \\ h_5 &= \delta_5 - 5h_4 - 6h_3 = 0 - 5 \cdot 211 - 6 \cdot (-65) = -665 \end{aligned}$$

Odavde je veoma teško intuitivno naslutiti opći oblik za  $h_n$ . Sekvenca očigledno nije periodična, a ne formira ni geometrijski niz. U takvim slučajevima za diferentne jednačine drugog reda uputno je potražiti moguće rješenje u formi sume dva geometrijska niza, tj. u obliku

$$h_n = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n$$

gdje su  $c_1$ ,  $q_1$ ,  $c_2$  i  $q_2$  nepoznate konstante koje treba odrediti. Pored toga, pretpostavićemo da je  $q_1 \neq q_2$  (u suprotnom bi se  $h_n$  sveo na geometrijski niz, a već znamo da to nije). Za  $n > 0$  je  $\delta_n = 0$ , tako da diferentna jednačina dobija oblik

$$h_n = -5h_{n-1} - 6h_{n-2}$$

Uvrštavanjem pretpostavljenog oblika za  $h_n$  imamo

$$c_1 q_1^n + c_2 q_2^n = -5(c_1 q_1^{n-1} + c_2 q_2^{n-1}) - 6(c_1 q_1^{n-2} + c_2 q_2^{n-2})$$

odnosno, nakon malo sređivanja,

$$c_1 q_1^{n-2} (q_1^2 + 5q_1 + 6) + c_2 q_2^{n-2} (q_2^2 + 5q_2 + 6) = 0$$

Pošto ova relacija mora da bude ispunjena identički za svako  $n > 0$ , to je jedino moguće ukoliko je

$$q_1^2 + 5q_1 + 6 = 0 \quad \text{i} \quad q_2^2 + 5q_2 + 6 = 0$$

odnosno ukoliko su  $q_1$  i  $q_2$  dva različita (zbog  $q_1 \neq q_2$ ) rješenja kvadratne jednačine  $q^2 + 5q + 6 = 0$ . Stoga je  $q_1 = -2$  i  $q_2 = -3$  (ili obrnuto). Dakle, izraz za  $h_n$  ima oblik

$$h_n = c_1 (-2)^n + c_2 (-3)^n \quad \text{za} \quad n > 0$$

Ostaje da se odrede konstante  $c_1$  i  $c_2$ , što je lako uraditi recimo koristeći uvjete  $h_1 = -5$  i  $h_2 = 19$  ( $h_0$  ne smijemo koristiti jer smo pretpostavili da izvedeni oblik za  $h_n$  vrijedi za  $n > 0$ ):

$$\begin{aligned} h_1 = -5 &\Rightarrow c_1 (-2)^1 + c_2 (-3)^1 = -5 &\Rightarrow 2c_1 + 3c_2 = 5 \\ h_2 = 19 &\Rightarrow c_1 (-2)^2 + c_2 (-3)^2 = 19 &\Rightarrow 4c_1 + 9c_2 = 5 \end{aligned}$$

Rješavanjem sistema  $2c_1 + 3c_2 = 5$  i  $4c_1 + 9c_2 = 5$  dobijamo  $c_1 = -2$  i  $c_2 = 3$ , tako da imamo

$$h_n = (-2) \cdot (-2)^n + 3 \cdot (-3)^n = (-2)^{n+1} - (-3)^{n+1} \quad \text{za} \quad n > 0$$

Ova formula je izvedena uz pretpostavku da je  $n > 0$ , tako da ona ne mora važiti i za  $n = 0$ . Međutim, ona slučajno vrijedi i za  $n = 0$ . Zaista, za  $n = 0$  imamo

$$(-2)^{0+1} - (-3)^{0+1} = -2 - (-3) = 1$$

Stoga možemo pisati

$$h_n = (-2)^{n+1} - (-3)^{n+1} \quad \text{za } n \geq 0$$

Za  $n < 0$  je naravno  $h_n = 0$ , što možemo zapisati i kao

$$h_n = [(-2)^{n+1} - (-3)^{n+1}] u_n$$

Napomena: Ovaj metod nalaženja impulsnog odziva za sisteme opisane diferentnim jednačinama drugog reda može se koristiti kad god je  $q_1 \neq q_2$ . Može se desiti da se za  $q_1$  i  $q_2$  dobiju kompleksni brojevi. U tom slučaju,  $c_1$  i  $c_2$  će također biti kompleksni i nakon izvjesnih manipulacija sa kompleksnim brojevima, rješenje se uvijek može svesti na oblik u kojem se imaginarna jedinica ne pojavljuje. Ukoliko je  $q_1 = q_2$ , impulsni oblik tada za dovoljno veliko  $n$  ima oblik  $h_n = (c_1 + c_2 n) q_1^n$  pa je moguće koristiti sličan postupak.

Metod se može generalizirati i za diferentne jednačine višeg reda. Recimo, ukoliko je diferentna jednačina  $k$ -tog reda, može se pretpostaviti da za dovoljno veliko  $n$  impulsni odziv ima oblik

$$h_n = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n + \dots + c_k q_k^n$$

tj. u obliku sume  $k$  geometrijskih nizova. Ovo će uspjeti kad god se dobije da su svi  $q_i$ ,  $i = 1..k$  različiti. Ukoliko to nije slučaj, potrebno je pretpostaviti neznatno drugačiji oblik za  $h_n$ , u kojem se polinom stepena  $p-1$  po  $n$  javlja kao množilac uz svaki član oblika  $q_s^n$  gdje je  $p$  broj ponavljanja rješenja  $q_s$ . Na primjer, ako se dobije da je  $q_1 = q_2 = q_3$ , rješenje za  $h_n$  treba pretpostaviti u obliku

$$h_n = (c_1 + c_2 n + c_3 n^2) q_1^n + c_4 q_4^n + \dots + c_k q_k^n$$

Mada je u principu na ovaj način moguće naći impulsni odziv svih sistema koji se opisuju linearnim diferentnim jednačinama sa konstantnim koeficijentima, postupci zasnovani na z-transformaciji obično mnogo lakše i brže dovode do rješenja.