a) Zamijenimo li x_n sa δ_n i y_n sa h_n, diferentna jednačina dobija oblik $h_n + h_{n-1} - 6\,h_{n-2} = \delta_n - 2\,\delta_{n-1}$, tako da imamo

$$h_n = \delta_n - 2\,\delta_{n-1} - h_{n-1} + 6\,h_{n-2}$$

Na osnovu kauzalnosti imamo $h_n = 0$ za $n < 0$, tako da primjenom rekurzivnog postupka dobijamo

$$\begin{aligned} h_0 &= \delta_0 - 2\,\delta_{-1} - h_{-1} + 6\,h_{-2} = 1 - 2\cdot 0 - 0 + 6\cdot 0 = 1 \\ h_1 &= \delta_1 - 2\,\delta_0 - h_0 + 6\,h_{-1} = 0 - 2\cdot 1 - 1 + 6\cdot 0 = -3 \\ h_2 &= \delta_2 - 2\,\delta_1 - h_1 + 6\,h_0 = 0 - 2\cdot 0 - (-3) + 6\cdot 1 = 9 \\ h_3 &= \delta_3 - 2\,\delta_2 - h_2 + 6\,h_1 = 0 - 2\cdot 0 - 9 + 6\cdot(-3) = -27 \end{aligned}$$

Ovo je sasvim dovoljno da se nasluti da je

$$h_n = (-3)^n \qquad (\text{za } n \ge 0)$$

Valjanost pretpostavke ćemo dokazati matematičkom indukcijom. Pretpostavka je tačna za $n = 0$ i za $n = 1$. Pretpostavimo sada da je ona tačna za $n = k$ i $n = k + 1$ (gdje je $k \ge 2$), tako da je

$$\begin{aligned} h_k &= (-3)^k \\ h_{k+1} &= (-3)^{k+1} \end{aligned}$$

Za $n > 0$ imamo $\delta_n = 0$ i $\delta_{n-1} = 0$, tako da diferentna jednačina dobija oblik $h_n = -h_{n-1} + 6\,h_{n-2}$. Sada, za $n = k + 2$ imamo

$$h_{k+2} = -h_{k+1} + 6\,h_k = -(-3)^{k+1} + 6\,(-3)^k = -(-3)^{k+1} - 2\,(-3)^{k+1} = -3\,(-3)^{k+1} = (-3)^{k+2}$$

Slijedi da pretpostavka vrijedi i za $n = k + 2$, tako da na osnovu principa matematičke indukcije slijedi da je pretpostavka valjana za svako $n \ge 0$.

b) Jedinični odziv g_n možemo odrediti na osnovu veze koja postoji između impulsnog odziva h_n i jediničnog odziva g_n (pogledati Zadatak 9.26) odnosno, što se svodi na isto, pomoću diskretne konvolucije impulsnog odziva h_n sa jediničnom pobudom u_n:

$$g_n = \sum_{k=0}^{\infty} h_{n-k}$$

Za $n < 0$ svi članovi gornjeg reda iščezavaju, jer je $h_n = 0$ za $n < 0$, pa je tim prije $h_{n-k} = 0$ (vrijednosti k su pozitivne). Stoga je $g_n = 0$ za $n < 0$. Za $n \ge 0$ gornja granica sumacije može se spustiti na $k = n$, s obzirom da je $h_{n-k} = 0$ za $n - k < 0$, odnosno za $k > n$. Stoga za $n \ge 0$ imamo:

$$g_n = \sum_{k=0}^{n} (-3)^{n-k} = (-3)^n \sum_{k=0}^{n} (-3)^{-k} = (-3)^n \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{3}\right)^k = (-3)^n \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} =$$

$$= \frac{3}{4}(-3)^n \left(1 - (-3)^{-n-1}\right) = \frac{1 - (-3)^{n+1}}{4} \qquad (\text{za } n \ge 0)$$

Interesantno je vidjeti šta bi se dobilo ukoliko bi se ovaj odziv pokušao pronaći rekurzivnim postupkom. Zamjenom x_n sa u_n i y_n sa g_n diferentna jednačina postaje $g_n + g_{n-1} - 6\,g_{n-2} = u_n - 2\,u_{n-1}$, tako da imamo

$$g_n = u_n - 2\,u_{n-1} - g_{n-1} + 6\,g_{n-2}$$

Kako je $u_n = 0$ za $n < 0$, na osnovu kauzalnosti slijedi da je i $g_n = 0$ za $n < 0$, odakle slijedi

$$g_0 = u_0 - 2\,u_{-1} - g_{-1} + 6\,g_{-2} = 1 - 2\cdot 0 - 0 + 6\cdot 0 = 1$$
$$g_1 = u_1 - 2\,u_0 - g_0 + 6\,g_{-1} = 1 - 2\cdot 1 - 1 + 6\cdot 0 = -2$$
$$g_2 = u_2 - 2\,u_1 - g_1 + 6\,g_0 = 1 - 2\cdot 1 - (-2) + 6\cdot 1 = 7$$
$$g_3 = u_3 - 2\,u_2 - g_2 + 6\,g_1 = 1 - 2\cdot 1 - 7 + 6\cdot(-2) = -20$$
$$g_4 = u_4 - 2\,u_3 - g_3 + 6\,g_2 = 1 - 2\cdot 1 - (-20) + 6\cdot 7 = 61$$
$$g_5 = u_5 - 2\,u_4 - g_4 + 6\,g_3 = 1 - 2\cdot 1 - 61 + 6\cdot(-20) = -182$$
$$g_6 = u_6 - 2\,u_5 - g_5 + 6\,g_4 = 1 - 2\cdot 1 - (-182) + 6\cdot 61 = 547$$

Odavde se ne vidi lako opći oblik za g_n u funkciji o n. Očigledno, nije u pitanju geometrijski niz, s obzirom da količnici susjednih članova nisu konstantni. Naime, apsolutne vrijednosti ovih količnika iznose redom 2/1, 7/2, 20/7, 61/20, 182/61, 547/182 itd. što u približnim decimalnim vrijednostima iznosi redom 2, 3.5, 2.86, 3.05, 2.98, 3.01 itd. Međutim, može se primijetiti da sve ove vrijednosti iznose otprilike 3 (i postaju sve bliže vrijednosti 3 kako sekvenca napreduje), tako da, na izvjestan način, ova sekcenca otprilike predstavlja geometrijski niz sa količnikom –3. Stoga se nameće ideja da je možda moguće od ove sekvence oduzeti neku konstantu, nazovimo je c_1, tako da nakon tog oduzimanja ona postane geometrijski niz sa količnikom –3, odnosno da bude $g_n - c_1 = c_2\,(-3)^n$, gdje je c_2 također konstanta (nulti član tog geometrijskog niza). Drugim riječima, pretpostavićemo da g_n ima oblik

$$g_n = c_1 + c_2\,(-3)^n$$

Konstante c_1 i c_2 možemo odrediti iz dvije poznate vrijednosti sekvence g_n, recimo g_0 i g_1. Tako, za $n = 0$ i $n = 1$ imamo

$$g_0 = c_1 + c_2\,(-3)^0 \quad\Rightarrow\quad c_1 + c_2 = 1$$
$$g_1 = c_1 + c_2\,(-3)^1 \quad\Rightarrow\quad c_1 - 3\,c_2 = -2$$

Odavde lako nalazimo $c_1 = 1/4$ i $c_2 = 3/4$, tako da je

$$g_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}(-1)^n = \frac{1-(-3)^{n+1}}{4} \qquad (\text{za } n \ge 0)$$

Dakle, nakon malo nagađanja, zaista je pronađena ispravna formula za g_n (razumije se da ovo ne mora uspjevati u drugim slučajevima). Valjanost ove formule može se provjeriti matematičkom indukcijom. Pretpostavka je tačna za $n = 0$ i za $n = 1$. Pretpostavimo sada da je ona tačna za $n = k$ i $n = k+1$ (gdje je $k \ge 2$), tako da je

$$g_k = \frac{1+(-3)^k}{4}$$
$$g_{k+1} = \frac{1+(-3)^{k+1}}{4}$$

Za $n > 1$ imamo $u_n = 1$ i $u_{n-1} = 1$, tako da diferentna jednačina dobija oblik $g_n = -1 - g_{n-1} + 6\,g_{n-2}$. Sada, za $n = k+2$ imamo

$$g_{k+2} = -1 - g_{k+1} + 6\,g_k = -1 - \frac{1+(-3)^{k+1}}{4} + 6\,\frac{1+(-3)^k}{4} = \frac{-4-1-(-3)^{k+1}+6+6\,(-3)^k}{4} =$$
$$= \frac{1+9\,(-3)^k}{4} = \frac{1+(-3)^{k+2}}{4}$$

Slijedi da pretpostavka vrijedi i za $n = k+2$, tako da na osnovu principa matematičke indukcije slijedi da je pretpostavka valjana za svako $n \ge 0$.