Poznato je da se proizvoljna sekvenca x_n može izraziti preko δ-sekvence na sljedeći način:

$$x_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \delta_{n-k}$$

Pri tome je gornja suma *lokalno konačna* u smislu da je za fiksirano *n* samo konačan broj članova različit od nule, što garantira konvergenciju reda (zapravo je samo jedan član različit od nule). Za konačne sekvence suma se svodi na čisto konačnu sumu.

a) Za sekvencu sa prve slike imamo $x_0 = x_2 = x_4 = 1$, $x_1 = x_3 = -1$ i $x_k = 0$ za $k < 0$ ili za $k > 4$, tako da imamo

$$x_n = \sum_{k=0}^{4} x_k \delta_{n-k} = x_0 \delta_n + x_1 \delta_{n-1} + x_2 \delta_{n-2} + x_3 \delta_{n-3} + x_4 \delta_{n-4} =$$
$$= 1 \cdot \delta_n - 1 \cdot \delta_{n-1} + 1 \cdot \delta_{n-2} - 1 \cdot \delta_{n-3} + 1 \cdot \delta_{n-4} = \delta_n - \delta_{n-1} + \delta_{n-2} - \delta_{n-3} + \delta_{n-4}$$

Da bismo izrazili istu sekvencu pomoću Heavisidove jedinične sekvence u_n iskoristićemo vezu $\delta_n = u_n - u_{n-1}$ koja postoji između Heavisidove jedinične i Kroneckerove δ-sekvence:

$$x_n = \delta_n - \delta_{n-1} + \delta_{n-2} - \delta_{n-3} + \delta_{n-4} =$$
$$= (u_n - u_{n-1}) - (u_{n-1} - u_{n-2}) + (u_{n-2} - u_{n-3}) - (u_{n-3} - u_{n-4}) + (u_{n-4} - u_{n-5}) =$$
$$= u_n - 2\,u_{n-1} + 2\,u_{n-2} - 2\,u_{n-3} + 2\,u_{n-4} - u_{n-5} = u_n - u_{n-5} - 2\,(u_{n-1} - u_{n-2} + u_{n-3} - u_{n-4})$$

b) Za sekvencu sa druge slike imamo $x_0 = x_1 = x_2 = 1$ i $x_k = 0$ za $k < 0$ ili za $k > 2$, tako da imamo

$$x_n = \sum_{k=0}^{2} x_k \delta_{n-k} = x_0 \delta_n + x_1 \delta_{n-1} + x_2 \delta_{n-2} = 1 \cdot \delta_n + 1 \cdot \delta_{n-1} + 1 \cdot \delta_{n-2} = \delta_n + \delta_{n-1} + \delta_{n-2}$$

Što se tiče prikaza preko Heavisideove jedinične sekvence, imamo

$$x_n = \delta_n + \delta_{n-1} + \delta_{n-2} = (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + (u_{n-2} - u_{n-3}) = u_n - u_{n-3}$$

c) Za sekvencu sa druge slike imamo $x_0 = 0$, $x_k = 1$ za $k < 0$ i $x_k = -1$ za $k > 0$, tako da imamo

$$x_n = \sum_{k=-\infty}^{-1} 1 \cdot \delta_{n-k} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1) \cdot \delta_{n-k} = \sum_{k=-\infty}^{-1} \delta_{n-k} - \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{n-k} = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{n+k} - \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{n-k} = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{n+k} - \delta_{n-k}$$

U ovom slučaju, rezultat je iskazan u vidu beskonačnog ali lokalno konačnog konvergentnog reda.

Što se tiče prikaza preko Heavisideove jedinične sekvence, ovdje lako možemo upasti u probleme ako ne pazimo šta radimo, s obzirom da su manipulacije sa beskonačnim redovima dozvoljene samo ukoliko su oni konvergentni. Na primjer, mogli bismo pokušati iskoristiti činjenicu da je $\delta_n = u_n - u_{n-1}$ na sljedeći (neispravan) način:

$$x_n = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{n+k} - \delta_{n-k} = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k} - u_{n+k-1} - u_{n-k} + u_{n-k-1} =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k} - \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} u_{n-k} + \sum_{k=1}^{\infty} u_{n-k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k} - \sum_{k=0}^{\infty} u_{n+k} - \sum_{k=1}^{\infty} u_{n-k} + \sum_{k=2}^{\infty} u_{n-k} =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k} - \left(u_n + \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}\right) - \left(u_{n-1} + \sum_{k=2}^{\infty} u_{n-k}\right) + \sum_{k=2}^{\infty} u_{n-k} =$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k} - \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}\right) - u_n - u_{n-1} + \left(\sum_{k=2}^{\infty} u_{n-k} - \sum_{k=2}^{\infty} u_{n-k}\right) = -u_n - u_{n-1}$$

Međutim, izvedeni rezultat je pogrešan. Da bismo se uvjerili u to, dovoljno je uvidjeti da za $n = 0$ imamo $x_0 = 0$, dok izvedena formula daje $-u_0 - u_{-1} = -1 - 0 = -1 \neq 0$. Problem je nastao u trenutku kada smo jedan beskonačni red razbili na četiri beskonačna reda. Od ta četiri reda koja su se pojavila, dva su divergentna i to su redovi

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k} \quad \text{i} \quad \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k-1}$$

Zaista, svi članovi ovih redova za indekse k veće ili jednake od $-n$ (prvi red) odnosno od $-n+1$ (drugi red) jednaki su jedinici, tako da imamo sumu u kojoj imamo beskonačno mnogo jedinica, koja je jasno beskonačna (također vidimo da opći član ovih redova ne teži nuli, što je neophodan uvjet za konvergenciju). Kako su sume ovih redova beskonačne, njihova razlika ima oblik $\infty - \infty$, što je klasična neodređena forma o kojoj se ovdje teško može reći nešto korisno. Primijetimo da su, za razliku od ovih redova, preostala dva reda

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{n-k} \quad \text{i} \quad \sum_{k=1}^{\infty} u_{n-k-1}$$

konvergentni. Zaista, svi članovi ovih redova za indekse k veće ili jednake od n (prvi red) odnosno od $n-1$ (drugi red) jednaki su nuli, tako da je samo konačno mnogo njihovih članova različito od nule, iz čega očigledno slijedi njihova konvergencija.

Opisani problem se može riješiti ukoliko se iskoristi činjenica da je δ-sekvenca parna, odnosno da vrijedi $\delta_{-n} = \delta_n$. Tako, ukoliko izraz δ_{n+k} zamijenimo sa ekvivalentnim izrazom δ_{-n-k} i primijenimo isti postupak, svi dobijeni redovi u toku postupka biće konvergentni, tako da je postupak valjan:

$$\begin{aligned} x_n &= \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{n+k} - \delta_{n-k} = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{-n-k} - \delta_{n-k} = \sum_{k=1}^{\infty} u_{-n+k} - u_{-n-k-1} - u_{n-k} + u_{n-k-1} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} u_{-n-k} - \sum_{k=1}^{\infty} u_{-n-k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} u_{n-k} + \sum_{k=1}^{\infty} u_{n-k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} u_{-n-k} - \sum_{k=2}^{\infty} u_{-n-k} - \sum_{k=1}^{\infty} u_{n-k} + \sum_{k=2}^{\infty} u_{n-k} = \\ &= \left(u_{-n-1} + \sum_{k=2}^{\infty} u_{-n-k}\right) - \sum_{k=1}^{\infty} u_{-n-k} - \left(u_{n-1} + \sum_{k=2}^{\infty} u_{n-k}\right) + \sum_{k=2}^{\infty} u_{n-k} = \\ &= u_{-n-1} + \left(\sum_{k=2}^{\infty} u_{-n-k} - \sum_{k=2}^{\infty} u_{-n-k}\right) - u_{n-1} - \left(\sum_{k=2}^{\infty} u_{n-k} - \sum_{k=2}^{\infty} u_{n-k}\right) = u_{-n-1} - u_{n-1} \end{aligned}$$

Postoje i mnogi drugi načini da se izvede isti rezultat, ali se u većini načina mora prije ili kasnije pozvati na parnost δ-sekvence. Recimo, vrlo brz način da se izvede traženi rezultat je sljedeći:

$$\begin{aligned} x_n &= \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{n+k} - \delta_{n-k} = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{-n-k} - \delta_{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{-n-k-1} - \delta_{n-k-1} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{(-n-1)-k} - \delta_{(n-1)-k} = u_{-n-1} - u_{n-1} \end{aligned}$$

U posljednjem koraku je iskorištena veza između δ-sekvence i Heavisideove jedinične sekvence izvedena u Zadatku 9.1. U suštini, do traženog rezultata $x_n = u_{-n-1} - u_{n-1}$ nije teško doći ni intuitivnim putem nakon malo razmišljanja, polazeći od definicije jedinične sekvence.

Interesantno je primijetiti i sljedeće. Lako se pokazuje da vrijedi $u_{-n-1} = 1 - u_n$, tako da se traženi rezultat može izraziti i u obliku

$$x_n = 1 - u_n - u_{n-1}$$

Ono što je interesantno je da se ovaj rezultat razlikuje od neispravnog rezultata $x_n = -u_n - u_{n-1}$ koji smo prethodno pogrešno izveli samo za konstantu 1. Slijedi jedan od načina da se izvede ovaj rezultat, u kojem se pogodnim prelaskom na graničnu vrijednost izbjegava ranije opisani problem sa divergentnim redovima:

$$
\begin{aligned}
x_n &= \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{n+k} - \delta_{n-k} = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k} - u_{n+k-1} - u_{n-k} + u_{n-k-1} = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k} - u_{n+k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} u_{n-k} - u_{n-k-1} = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} u_{n+k} - u_{n+k-1} - \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} u_{n-k} - u_{n-k-1} = \\
&= \lim_{N\to\infty} \Big(\sum_{k=1}^{N} u_{n+k} - \sum_{k=1}^{N} u_{n+k-1} \Big) - \lim_{N\to\infty} \Big(\sum_{k=1}^{N} u_{n-k} - \sum_{k=1}^{N} u_{n-k-1} \Big) = \\
&= \lim_{N\to\infty} \Big(\sum_{k=1}^{N} u_{n+k} - \sum_{k=0}^{N-1} u_{n+k} \Big) - \lim_{N\to\infty} \Big(\sum_{k=1}^{N} u_{n-k} - \sum_{k=2}^{N+1} u_{n-k} \Big) = \\
&= \lim_{N\to\infty} \Big(\sum_{k=1}^{N-1} u_{n+k} + u_{n+N} - u_n - \sum_{k=0}^{N-1} u_{n+k} \Big) - \lim_{N\to\infty} \Big(u_{n-1} + \sum_{k=1}^{N} u_{n-k} - \sum_{k=2}^{N+1} u_{n-k} - u_{n-N-1} \Big) = \\
&= \lim_{N\to\infty} (u_{n+N} - u_n) - \lim_{N\to\infty} (u_{n-1} - u_{n-N-1}) = \lim_{N\to\infty} u_{n+N} - u_n - u_{n-1} - \lim_{N\to\infty} u_{n-N-1} = 1 - u_n - u_{n-1}
\end{aligned}
$$

Ovdje je iskorištena činjenica da $u_{n+N} \to 1$ i $u_{n-N-1} \to 0$ za $N \to \infty$ neovisno od n. Zaista, kakav god da je n, imamo da je $u_{n+N} = 1$ za sve vrijednosti $N \geq -n$ i $u_{n-N-1} = 0$ za sve vrijednosti $N > n - 1$.

Odavde nije teško vidjeti i odakle potiče izgubljena jedinica. Može se također primijetiti da se u drugom redu koji smo dobili nakon razbijanja na dva reda nije morao koristiti limes parcijalnih suma, jer se taj red smio rastaviti na razliku dva reda (oba su konvergentna). Također je interesantno da u ovom izvođenju nismo morali koristiti činjenicu o parnosti δ-sekvence.