a) Prema definiciji, impulsni odziv h_n je odziv na sekvencu $x_n = \delta_n$. Diferentna jednačina tako dobija oblik $h_n + 2\,h_{n-1} = \delta_n - \delta_{n-1}$ odakle imamo

$$h_n = \delta_n - \delta_{n-1} - 2\,h_{n-1}$$

Na osnovu kauzalnosti slijedi $h_n = 0$ za $n < 0$, tako da rekurzivnim postupkom dobijamo:

$$h_0 = \delta_0 - \delta_{-1} - 2\,h_{-1} = 1 - 0 - 2 \cdot 0 = 1$$
$$h_1 = \delta_1 - \delta_0 - 2\,h_0 = 0 - 1 - 2 \cdot 1 = -3$$
$$h_2 = \delta_2 - \delta_1 - 2\,h_1 = 0 - 0 - 2 \cdot (-3) = 6$$
$$h_3 = \delta_3 - \delta_2 - 2\,h_2 = 0 - 0 - 2 \cdot 6 = -12$$
$$h_4 = \delta_4 - \delta_3 - 2\,h_3 = 0 - 0 - 2 \cdot (-12) = 24$$
$$h_5 = \delta_5 - \delta_4 - 2\,h_4 = 0 - 0 - 2 \cdot 24 = -48$$

Općenito, kako za $n > 2$ vrijedi $\delta_n = 0$ i $\delta_{n-1} = 0$, to za $n > 2$ imamo

$$h_n = -2\,h_{n-1}$$

odnosno, za $n \geq 2$ sekvenca h_n obrazuje geometrijski niz sa količnikom –2. Stoga za $n \geq 2$ izraz za h_n ima oblik $h_n = c\,(-2)^n$. Kako je $h_2 = 6$, to je $c = 3/2$, pa imamo

$$h_n = \frac{3}{2}(-2)^n = -3\,(-2)^{n-1} \quad \text{za} \quad n \geq 2$$

Lako se provjerava da formula izvedena formula ostaje valjana i za $n = 1$, ali ne i za $n = 0$. Zaista, za $n = 0$ ova formula daje $h_0 = 3/2$ umjesto ispravne vrijednosti $h_0 = 1$. Zbog toga, konačan izraz za h_n možemo pisati u sljedećem obliku:

$$h_n = \begin{cases} 0 & , \; n < 0 \\ 1 & , \; n = 0 \\ -3\,(-2)^{n-1} & , \; n > 0 \end{cases}$$

Alternativno, moguće je dobiti i kompaktnu formulu koja će vrijediti za sve vrijednosti $n \geq 0$, pa čak i formulu koja će vrijediti za sve vrijednosti $n \in \mathbb{Z}$. Jedna od mogućnosti je da od izraza $-3\,(-2)^{n-1}$ oduzmemo neki kompenzacioni izraz koji će svuda biti 0 osim za $n = 0$ (gdje nastupa odstupanje) i koji će biti takav da “neispravnu” vrijednost 3/2 svede na “ispravnu” vrijednost 1. Očigledno, takav kompenzacioni izraz može biti $(1/2) \cdot \delta_n$, tako da je

$$h_n = -3\,(-2)^{n-1} - \frac{1}{2}\delta_n \quad \text{za} \quad n \geq 0$$

Druga mogućnost je da pomnožimo izraz $-3\,(-2)^{n-1}$ sa u_{n-1} čime ćemo postići da transformirani izraz bude jednak nuli za $n \geq 1$, nakon čega dodajemo kompenzacioni izraz koji će učiniti da tako transformirani izraz dobije “ispravnu” vrijednost 1 za $n = 0$. Takav kompenzacioni izraz je očigledno δ_n, tako da imamo

$$h_n = \delta_n - 3\,(-2)^{n-1}\,u_{n-1}$$

Ovaj izraz ima dodatnu lijepu osobinu da ne vrijedi samo za $n \geq 0$, nego za sve vrijednosti $n \in \mathbb{Z}$. Zaista, lako se vidi da ovaj izraz ima vrijednost 0 za $n < 0$, s obzirom da je tada $\delta_n = 0$ i $u_{n-1} = 0$.

b) Jedinični odziv g_n je po definiciji odziv na jediničnu sekvencu $x_n = u_n$. Nakon uvrštavanja $x_n = u_n$ i $y_n = g_n$ diferentna jednačina dobija oblik $g_n + 2\,g_{n-1} = u_n - u_{n-1}$, odnosno $g_n + 2\,g_{n-1} = \delta_n$ s obzirom na poznatu vezu između jedinične i impulsne sekvence prema kojoj je $u_n - u_{n-1} = \delta_n$. Odavde dalje imamo

$$g_n = \delta_n - 2\,g_{n-1}$$

Na osnovu kauzalnosti slijedi $g_n = 0$ za $n < 0$, tako da rekurzivnim postupkom dobijamo:

$$g_0 = \delta_0 - 2\,g_{-1} = 1 - 2 \cdot 0 = 1$$

$$g_1 = \delta_1 - 2\,g_0 = 0 - 2 \cdot 1 = -2$$

$$g_2 = \delta_2 - 2\,g_1 = 0 - 2 \cdot (-2) = 4$$

$$g_3 = \delta_3 - 2\,g_2 = 0 - 2 \cdot 4 = -8$$

Općenito, kako za $n > 0$ vrijedi $\delta_n = 0$, to za $n > 0$ imamo

$$g_n = -2\,g_{n-1}$$

to za $n \geq 0$ sekvenca g_n obrazuje geometrijski niz sa količnikom –2. Kako je uz to $g_0 = 1$, to je

$$g_n = (-2)^n \quad \text{za} \quad n \geq 0$$

Drugi način da izvedemo isti izraz je koristeći poznati izraz za h_n i diskretnu konvoluciju. Naime, kako je $u_n = 0$ za $n < 0$ i $u_n = 1$ za $n \geq 0$, imamo

$$g_n = (u * h)_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k\, h_{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} h_{n-k}$$

Za $n < 0$ svi članovi gornjeg reda iščezavaju, jer je $h_n = 0$ za $n < 0$, pa je tim prije $h_{n-k} = 0$ (vrijednosti k su pozitivne). Stoga je $g_n = 0$ za $n < 0$. Za $n \geq 0$ gornja granica sumacije može se spustiti na $k = n$, s obzirom da je $h_{n-k} = 0$ za $n - k < 0$, odnosno za $k > n$. Stoga za $n \geq 0$ imamo:

$$g_n = \sum_{k=0}^{n} h_{n-k} = h_0 + \sum_{k=0}^{n-1} h_{n-k} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} -3\,(-2)^{n-k-1} = 1 - 3\,(-2)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} (-2)^{-k} =$$

$$= 1 - 3\,(-2)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = 1 - 3\,(-2)^{n-1} \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = 1 - 2\,(-2)^{n-1} \left(1 - (-2)^{-n}\right) =$$

$$= 1 + (-2)^n \left(1 - (-2)^{-n}\right) = 1 + (-2)^n - 1 = (-2)^n \qquad (\text{za } n \geq 0)$$

Vidimo da smo dobili isti rezultat kao i direktnim postupkom.