a) Zamijenimo li x_n sa δ_n i y_n sa h_n, diferentna jednačina postaje $h_n + 2\,h_{n-1} + h_{n-2} = \delta_n$, odakle je

$$h_n = \delta_n - 2\,h_{n-1} - h_{n-2}$$

Na osnovu kauzalnosti imamo $h_n = 0$ za $n < 0$, tako da primjenom rekurzivnog postupka dobijamo

$$\begin{aligned} h_0 &= \delta_0 - 2\,h_{-1} - h_{-2} = 1 - 2\cdot 0 - 0 = 1 \\ h_1 &= \delta_1 - 2\,h_0 - h_{-1} = 0 - 2\cdot 1 - 0 = -2 \\ h_2 &= \delta_2 - 2\,h_1 - h_0 = 0 - 2\cdot(-2) - 1 = 3 \\ h_3 &= \delta_3 - 2\,h_2 - h_1 = 0 - 2\cdot 3 - (-2) = -4 \end{aligned}$$

Odavde se lako može naslutiti da je $|h_n| = n + 1$. Kako pored toga članovi sekvence alternativno mijenjaju znak, može se naslutiti da je

$$h_n = (-1)^n\,(n+1) \qquad (\text{za } n \ge 0)$$

Valjanost ove pretpostavke ćemo dokazati matematičkom indukcijom. Pretpostavka je tačna za $n = 0$ i za $n = 1$. Pretpostavimo sada da je ona tačna za $n = k$ i $n = k + 1$ (gdje je $k \ge 2$), tako da je

$$\begin{aligned} h_k &= (-1)^k\,(k+1) \\ h_{k+1} &= (-1)^{k+1}\,(k+2) \end{aligned}$$

Za $n > 0$ imamo $\delta_n = 0$, tako da diferentna jednačina dobija oblik $h_n = -2\,h_{n-1} - h_{n-2}$. Sada, za $n = k + 2$ imamo

$$\begin{aligned} h_{k+2} &= -2\,h_{k+1} - h_k = -2\,(-1)^{k+1}\,(k+2) - (-1)^k\,(k+1) = 2\,(-1)^{k+2}\,(k+2) - (-1)^{k+2}\,(k+1) = \\ &= (-1)^{k+2}\,(2k + 4 - k - 1) = (-1)^{k+2}\,(k+3) \end{aligned}$$

Slijedi da pretpostavka vrijedi i za $n = k + 2$, tako da na osnovu principa matematičke indukcije slijedi da je pretpostavka valjana za svako $n \ge 0$.

b) Odziv sistema na pobudu $x_n = \delta_{n-1}$ lako nalazimo na osnovu osobine stacionarnosti:

$$y_n = \mathrm{L}[x_n] = \mathrm{L}[\delta_{n-1}] = \mathrm{L}[\delta]_{n-1} = h_{n-1} = (-1)^{n-1}\,n \qquad (\text{za } n-1 \ge 0, \text{ tj. za } n \ge 1)$$

Ovaj izraz vrijedi za $n - 1 \ge 0$, tj. za $n \ge 1$, inače je $y_n = 0$ (jer je $h_n = 0$ za $n < 0$). Međutim, kako izraz $(-1)^{n-1}\,n$ svakako ima vrijednost 0 za $n = 0$, možemo tvrditi da je formula $y_n = (-1)^{n-1}\,n$ tačna i za $n = 0$, tako da možemo pisati da je

$$y_n = (-1)^{n-1}\,n \qquad (\text{za } n \ge 0)$$

Do istog zaključka se može doći i direktno rekurzivnim postupkom. Naime, ukoliko se u diferentnu jednačinu uvrsti $x_n = \delta_{n-1}$, ona dobija oblik $y_n + 2\,y_{n-1} + y_{n-2} = \delta_{n-1}$, tako da imamo

$$y_n = \delta_{n-1} - 2\,h_{n-1} - h_{n-2}$$

Rekurzivni postupak sada daje

$$\begin{aligned} y_0 &= \delta_{-1} - 2\,y_{-1} - y_{-2} = 0 - 2\cdot 0 - 0 = 0 \\ y_1 &= \delta_0 - 2\,y_0 - y_{-1} = 1 - 2\cdot 0 - 0 = 1 \\ y_2 &= \delta_1 - 2\,y_1 - y_0 = 0 - 2\cdot 1 - 0 = -2 \\ y_3 &= \delta_2 - 2\,y_2 - y_1 = 0 - 2\cdot(-2) - 1 = 3 \end{aligned}$$

Odavde se lako naslućuje

$$y_n = (-1)^{n+1}\, n \qquad (\text{za } n \geq 0)$$

Valjanost ove pretpostavke se također može dokazati matematičkom indukcijom. Pretpostavka je tačna za $n = 0$ i za $n = 1$. Pretpostavimo sada da je ona tačna za $n = k$ i $n = k+1$ (gdje je $k \geq 2$), tako da je

$$y_k = (-1)^{k+1}\, k$$
$$y_{k+1} = (-1)^{k+2}\, (k+1)$$

Za $n > 1$ imamo $\delta_{n-1} = 0$, tako da diferentna jednačina dobija oblik $y_n = -2\, y_{n-1} - y_{n-2}$. Sada, za $n = k+2$ imamo

$$y_{k+2} = -2\, y_{k+1} - y_k = -2\,(-1)^{k+2}\,(k+1) - (-1)^{k+1}\, k = 2\,(-1)^{k+3}\,(k+1) - (-1)^{k+3}\, k =$$
$$= (-1)^{k+3}\,(2k+2-k) = (-1)^{k+3}\,(k+2)$$

Slijedi da pretpostavka vrijedi i za $n = k+2$, tako da na osnovu principa matematičke indukcije slijedi da je pretpostavka valjana za svako $n \geq 0$.