Prema definiciji diskretne konvolucije, možemo pisati:

$$(x*y)_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k y_{n-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-|k|} 3^{-|n-k|} = \sum_{k=-\infty}^{-1} 2^{k} 3^{-|n-k|} + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} 3^{-|n-k|}$$

Dalje, na osnovu definicije apsolutne vrijednosti imamo:

$$|n-k| = \begin{cases} -(n-k) \ , \ n-k<0 \\ \ \ n-k \quad , \ n-k \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} k-n \ , \ k>n \\ n-k \ , \ k \leq n \end{cases}$$

Dakle, izraz $|n-k|$ svodi se na dva različita analitička izraza, pri čemu se sa jednog na drugi prelazi pri vrijednosti $k = n$. Odavde slijedi da je neophodno razmotriti posebno slučajeve $n < 0$ i $n \geq 0$, jer će se u prvom slučaju prva od suma u izrazu za $(x*y)_n$ raspasti na dvije sume, dok će se u drugom slučaju to desiti sa drugom sumom. Pri računanju ovih suma od koristi su sljedeće poznate formule za sumu geometrijskog reda:

$$\sum_{k=\mathrm{N}}^{\mathrm{M}} q^k = \frac{q^{\mathrm{N}} - q^{\mathrm{M}+1}}{1-q} \quad \text{i} \quad \sum_{k=\mathrm{N}}^{\infty} q^k = \frac{q^{\mathrm{N}}}{1-q} \quad \text{(pod uvjetom } |q|<1)$$

Za $n < 0$ imamo:

$$(x*y)_n = \sum_{k=-\infty}^{-1} 2^k 3^{-|n-k|} + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} 3^{-|n-k|} = \sum_{k=-\infty}^{n-1} 2^k 3^{k-n} + \sum_{k=n}^{-1} 2^k 3^{n-k} + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} 3^{n-k} =$$

$$= 3^{-n} \sum_{k=-\infty}^{n-1} 6^k + 3^n \sum_{k=n}^{-1} (\frac{2}{3})^k + 3^n \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{6})^k = 3^{-n} \sum_{k=1-n}^{\infty} (\frac{1}{6})^k + 3^n \sum_{k=n}^{-1} (\frac{2}{3})^k + 3^n \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{6})^k =$$

$$= 3^{-n} \frac{(\frac{1}{6})^{1-n}}{1-\frac{1}{6}} + 3^n \frac{(\frac{2}{3})^n - 1}{1-\frac{2}{3}} + 3^n \frac{1}{1-\frac{1}{6}} = \frac{6}{5} 3^{-n} (\frac{1}{6})^{1-n} + 3 \cdot 3^n \left((\frac{2}{3})^n - 1 \right) + \frac{6}{5} 3^n =$$

$$= \frac{1}{5} 3^{-n} 6^n + 3\left(2^n - 3^n\right) + \frac{6}{5} 3^n = \frac{1}{5} 2^n + 3\left(2^n - 3^n\right) + \frac{6}{5} 3^n = \frac{16}{5} 2^n - \frac{9}{5} 3^n$$

S druge strane, za $n \geq 0$ imamo:

$$(x*y)_n = \sum_{k=-\infty}^{-1} 2^k 3^{-|n-k|} + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} 3^{-|n-k|} = \sum_{k=-\infty}^{-1} 2^k 3^{k-n} + \sum_{k=0}^{n} 2^{-k} 3^{k-n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k} 3^{n-k} =$$

$$= 3^{-n} \sum_{k=-\infty}^{-1} 6^k + 3^{-n} \sum_{k=0}^{n} (\frac{3}{2})^k + 3^n \sum_{k=n+1}^{\infty} (\frac{1}{6})^k = 3^{-n} \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{6})^k + 3^{-n} \sum_{k=0}^{n} (\frac{3}{2})^k + 3^n \sum_{k=n+1}^{\infty} (\frac{1}{6})^k =$$

$$= 3^{-n} \frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}} + 3^{-n} \frac{1-(\frac{3}{2})^{n+1}}{1-\frac{3}{2}} + 3^n \frac{(\frac{1}{6})^{n+1}}{1-\frac{1}{6}} = \frac{1}{5} 3^{-n} - 2 \cdot 3^{-n} \left(1 - (\frac{3}{2})^{n+1}\right) + \frac{6}{5} 3^n (\frac{1}{6})^{n+1} =$$

$$= \frac{1}{5} 3^{-n} + 2\left(3^{-n} - \frac{3}{2} 2^{-n}\right) + \frac{1}{5} 3^n (\frac{1}{6})^n = \frac{1}{5} 3^{-n} - 2 \cdot 3^{-n} - 3 \cdot 2^{-n} + \frac{1}{5} 2^{-n} = \frac{16}{5} 2^{-n} - \frac{9}{5} 3^{-n}$$

Dobijene izraze za $(x*y)_n$ pri $n < 0$ i $n \geq 0$ možemo objediniti u jedinstvenu formulu:

$$(x*y)_n = \frac{16}{5} 2^{-|n|} - \frac{9}{5} 3^{-|n|}$$

Do istog rezultata moglo se doći i brže. Naime, lako je pokazati da ako su obe sekvence x_n i y_n parne u smislu da je $x_{-n} = x_n$ i $y_{-n} = y_n$ za sve vrijednosti n (kao što je slučaj u ovom zadatku), tada i njihova konvolucija $(x * y)_n$ mora biti parna sekvenca. Dakle, dovoljno je bilo pronaći izraz za $(x * y)_n$ uz pretpostavku $n \geq 0$, a dobijeni izraz prosto produžiti do parne sekvence.

Napomena: Za slučaj kada barem jedna od sekvenci x_n i y_n nije kauzalna, njihova diskretna konvolucija $(x * y)_n$ je predstavljena beskonačnim redom, koji može da ne bude konvergentan (tj. diskretna konvolucija može da ne postoji). U slučaju da je jedna od učesnica u konvoluciji kauzalna, dvostrano beskonačna suma svodi se na jednostrano beskonačnu, dok je u općem slučaju suma dvostrano beskonačna (kao u ovom zadatku). Može se dokazati da je konvergencija reda koji predstavlja diskretnu konvoluciju zagarantirana u svim slučajevima kada su sekvence x_n i y_n apsolutno sumabilne, tj. kada su redovi

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_k| \quad \text{i} \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |y_k|$$

konvergentni. Ove pretpostavke su ispunjene u praktično svim slučajevima interesantnim za praksu. Lako se provjerava da su one ispunjene i u postavljenom zadatku.