

- a) U jednačini $y_{n+1} + y_{n-1} = x_{n+k}$ javlja se vrijednost izlaza u budućnosti, tj. u trenutku $n+1$. Da bismo se oslobodili ove zavisnosti, smijenimo n sa $n-1$, čime jednačina postaje $y_n + y_{n-2} = x_{n+k-1}$. Ova jednačina riješena po y_n glasi $y_n = x_{n+k-1} - y_{n-2}$. Da vrijednost izlaza u trenutku n ne bi zavisila od vrijednosti ulaza u budućim trenucima, što je potreban i dovoljan uvjet za kauzalnost, mora vrijediti $n+k-1 \leq n$, što će biti ispunjeno za $k-1 \leq 0$, odnosno za $k \leq 1$.
- b) Impulsni odziv h_n je po definiciji odziv na pobudu $x_n = \delta_n$, tako da imamo

$$h_n = \delta_{n+k-1} - h_{n-2}$$

Na osnovu kauzalnosti imamo $h_n = 0$ za $n < 0$. Također, za $n+k-1 < 0$ odnosno za $n < 1-k$ imamo $\delta_{n+k-1} = 0$, pa je $h_n = 0$ zapravo za sve $n < 1-k$. Razmotrimo stoga slučaj $n \geq 1-k$. Rekurzivnim postupom dobijamo:

$$h_{1-k} = \delta_0 - h_{-1-k} = 1 - 0 = 1$$

$$h_{2-k} = \delta_1 - h_{-k} = 0 - 0 = 0$$

$$h_{3-k} = \delta_2 - h_{1-k} = 0 - 1 = -1$$

$$h_{4-k} = \delta_3 - h_{2-k} = 0 - 0 = 0$$

$$h_{5-k} = \delta_4 - h_{3-k} = 0 - (-1) = 1$$

$$h_{6-k} = \delta_5 - h_{4-k} = 0 - 0 = 0$$

Oдавde se naslućuje da sekvenca h_n za $n \geq 1-k$ ima oblik $1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \dots$ odnosno da je periodična sa periodom 4. Zaista, za $n \geq 5-k$ imamo $\delta_{n+k-1} = 0$ i $\delta_{n+k-3} = 0$, pa imamo

$$h_n = \delta_{n+k-1} - h_{n-2} = -h_{n-2} = -(\delta_{n+k-3} - h_{n-4}) = h_{n-4} \quad (\text{za } n \geq 5-k)$$

Ova sekvenca ima potpuno isti oblik kao u Zadatku 9.19, samo što započinje za $n = 1-k$ umjesto za $n = 0$. Stoga možemo naslutiti da za nju vrijedi isti analitički izraz kao u Zadatku 9.19, samo uz zamjenu n sa $n - (1-k)$ odnosno sa $n+k-1$. Drugim riječima, pretpostavićemo da za $n \geq 1-k$ izraz za h_n ima oblik

$$h_n = \cos \frac{(n+k-1)\pi}{2}$$

Valjanost ove pretpostavke jednostavno je dokazati. Naime, kako je

$$h_{n+4} = \cos \frac{(n+k+3)\pi}{2} = \cos \left[\frac{(n+k-1)\pi}{2} + 2\pi \right] = \cos \frac{(n+k-1)\pi}{2} = h_n$$

to je pretpostavljeni izraz za sekvencu h_n zaista periodičan sa periodom 4. Kako je pored toga pretpostavljeni izraz za h_n korektan za $n = 1-k$, $n = 2-k$, $n = 3-k$ i $n = 4-k$, na osnovu principa matematičke indukcije slijedi da je pretpostavljeni izraz korektan za sve cjelobrojne vrijednosti $n \geq 1-k$.

Kako je $u_{n+k-1} = 1$ za $n \geq 1-k$ i $u_{n+k-1} = 0$ za $n < 1-k$, izraz za h_n koji je tačan za sve cjelobrojne vrijednosti n (a ne samo za $n \geq 1-k$) možemo kompaktno zapisati u obliku

$$h_n = \cos \frac{(n+k-1)\pi}{2} u_{n+k-1}$$