

Da bi sistem bio kauzalan, potrebno je i dovoljno da njegov impulsni odziv bude kauzalan, tj. da bude  $h_n = 0$  za  $n < 0$ .

- a) Na osnovu definicije  $\delta$ -sekvence imamo  $\delta_{n-1} = 0$  za  $n-1 \neq 0$ , tj. za  $n \neq 1$ . Odavde je očigledno  $h_n = \delta_{n-1} = 0$  za  $n < 0$ , tako da je sistem kauzalan.
- b) Na osnovu definicije Heavisideove jedinične sekvence imamo:

$$u_{-n} = \begin{cases} 1, & -n \geq 0 \\ 0, & -n < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & n \leq 0 \\ 0, & n > 0 \end{cases}$$

$$u_{-n-1} = \begin{cases} 1, & -n-1 \geq 0 \\ 0, & -n-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & n \leq -1 \\ 0, & n > -1 \end{cases}$$

Kako je  $n$  cijeli broj, imamo

$$h_n = u_{-n} - u_{-n-1} = \begin{cases} 0, & n \leq -1 \vee n > 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$

Očigledno je  $h_n = 0$  za  $n < 0$ , tako da je sistem kauzalan. Zapravo, ovdje imamo  $h_n = \delta_n$ , što se može zaključiti i na razne druge načine. Recimo, vrijedi  $\delta_n = u_n - u_{n-1}$ , tako da je  $\delta_{-n} = u_{-n} - u_{-n-1}$ , odnosno  $h_n = \delta_{-n}$ . Međutim,  $\delta$ -sekvencija je očigledno parna, odnosno vrijedi  $\delta_{-n} = \delta_n$ , tako da je zaista  $h_n = \delta_n$ . Do istog zaključka možemo doći i preko relacije koja izražava Heavisideovu jediničnu sekvencu preko  $\delta$ -sekvence (pogledati Zadatak 9.1):

$$h_n = u_{-n} - u_{-n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{-n-k} - \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{-n-1-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{-n-k} - \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{-n-(k+1)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{-n-k} - \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{-n-k} = \delta_{-n} + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{-n-k} - \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{-n-k} = \delta_{-n} = \delta_n$$

- c) Iz definicije sekvence  $h_n$  slijedi

$$h_{-10} = \delta_{-10+10} - \delta_{-10-10} = \delta_0 - \delta_{-20} = 1 - 0 = 1 \neq 0$$

Očigledno nije ispunjen uvjet  $h_n = 0$  za  $n < 0$  (jer nije zadovoljen za  $n = -10$ ), tako da sistem nije kauzalan.

- d) Kako je  $2^{-|n|} \neq 0$  za sve vrijednosti  $n \in \mathbb{Z}$ , jasno je da sistem nije kauzalan.
- e) Imamo  $u_{n-2} = 0$  za  $n-2 < 0$ , tj. za  $n < 2$ . Stoga je i  $2^{-|n|} u_{n-2} = 0$  za  $n < 2$ . Slijedi da je  $h_n = 0$  za sve vrijednosti  $n < 2$ , pa samim tim i za sve vrijednosti  $n < 0$ . Odavde slijedi da je sistem kauzalan. Generalno, bez obzira na oblik sekvence  $x_n$ , sekvenca  $x_n u_{n-k}$  je uvijek kauzalna kadgod je  $k$  neki nenegativan parametar (ovo ne mora vrijediti ukoliko je  $k$  negativan).
- f) Imamo  $u_{n+3} = 0$  za  $n+3 < 0$ , tj. za  $n < -3$ . Stoga je i  $2^n u_{n+3} = 0$  za  $n < -3$ . Dakle, sigurno vrijedi  $h_n = 0$  za  $n < -3$ . Međutim, da bi sistem bio kauzalan, uvjet  $h_n = 0$  mora vrijediti i za  $n = -1$  kao i za  $n = -2$ . Kako je  $h_{-1} = 2^{-1} u_{-1+3} = 1/2 \neq 0$ , uvjet kauzalnosti nije ispunjen za  $n = -1$ , te sistem nije kauzalan (uvjet kauzalnosti nije ispunjen ni za  $n = -2$ ).
- g) Imamo  $u_{n+1} = 0$  za  $n+1 < 0$ , tj. za  $n < -1$ . Stoga je i  $(n+1) u_{n+1} = 0$  za  $n < -1$ . Dakle, sigurno vrijedi  $h_n = 0$  za  $n < -1$ . Da bi sistem bio kauzalan, uvjet  $h_n = 0$  mora vrijediti i za  $n = -1$ . Kako je  $h_{-1} = (-1+1) u_{-1+1} = 0 \cdot 1 = 0$ , uvjet  $h_n = 0$  vrijedi za sve vrijednosti  $n < 0$ , tako da je sistem kauzalan.

- h) Za  $n < 0$  vrijedi  $|n| = -n$ , tako da za  $n < 0$  imamo  $h_n = n + |n| = n + (-n) = 0$ , tako da je sistem kauzalan. Usput, za  $n \geq 0$  vrijedi  $|n| = n$ , tako da za  $n \geq 0$  imamo  $h_n = n + n = 2n$ . Stoga se impulsni odziv ovog sistema može napisati i u obliku  $h_n = 2n u_n$ , odakle je njegova kauzalnost očigledna.