

Po definiciji, impulsni odziv  $h_n$  je odziv sistema na pobudu  $x_n = \delta_n$ . Zamjenom  $y_n$  sa  $h_n$  i  $x_n$  sa  $\delta_n$ , diferentna jednačina dobija oblik  $h_n - 2h_{n-1} = \delta_n$ . Ono što treba pokazati je da je ova diferentna jednačina zadovoljena kako za  $h_n = h_n' = 2^n u_n$ , tako i za  $h_n = h_n'' = -2^n u_{-n-1}$ .

Za  $h_n = 2^n u_n$  imamo:

$$h_n - 2h_{n-1} = 2^n u_n - 2 \cdot 2^{n-1} u_{n-1} = 2^n (u_n - u_{n-1}) = 2^n \delta_n = 2^0 \delta_n = \delta_n$$

Dakle, diferentna jednačina je zaista zadovoljena za  $h_n = h_n'$ . Ovdje smo iskoristili činjenicu da vrijedi  $u_n - u_{n-1} = \delta_n$ , kao i svojstvo selekcije  $x_n \delta_n = x_0 \delta_n$  za proizvoljnu sekvencu  $x_n$ .

Za  $h_n = -2^n u_{-n-1}$  imamo:

$$h_n - 2h_{n-1} = -2^n u_{-n-1} + 2 \cdot 2^{n-1} u_{-n} = 2^n (u_{-n} - u_{-n-1}) = 2^n \delta_{-n} = 2^n \delta_n = 2^0 \delta_n = \delta_n$$

Dakle, diferentna jednačina je zadovoljena i za  $h_n = h_n''$ , što je i trebalo pokazati. Ovdje je iskorištena činjenica da iz  $u_n - u_{n-1} = \delta_n$  slijedi  $u_{-n} - u_{-n-1} = \delta_{-n}$ , kao i činjenica da je  $\delta$ -sekvencu parna, odnosno da vrijedi  $\delta_{-n} = \delta_n$ .

Oдавде slijedi da diferentne jednačine ne određuju jednoznačno sistem. Primijetimo ipak da je sistem opisan sa  $h_n'$  kauzalan, a sistem opisan sa  $h_n''$  nije. Lako je pokazati da ukoliko znamo da je sistem kauzalan, tada diferentna jednačina jednoznačno određuje sistem. Zbog toga se diferentnim jednačinama tipično opisuju samo kauzalni sistemi.

Napomena: Pored sistema sa impulsnim odzivima  $h_n'$  i  $h_n''$ , postoji još beskonačno mnogo drugih sistema koji se opisuju istom diferentnom jednačinom. Tako se sistemi sa impulsnim odzivima

$$h_n = 2^n (C + u_n)$$

gdje je C ma kakav realan broj također se opisuju istom diferentnom jednačinom. Zaista, imamo

$$h_n - 2h_{n-1} = 2^n (C + u_n) - 2 \cdot 2^{n-1} (C + u_{n-1}) = 2^n (u_n - u_{n-1}) = 2^n \delta_n = 2^0 \delta_n = \delta_n$$

Međutim, od svih ovih sistema kauzalan je samo sistem kod kojeg je  $C = 0$ , a to je upravo sistem sa impulsnim odzivom  $h_n = h_n'$ . Zaista, za  $n = 0$  imamo  $h_{-1} = 2^{-1}C = C/2$ , što je jednako nuli samo ako je  $C = 0$ . Također, za  $C = -1$  dobija se sistem sa impulsnim odzivom  $h_n = h_n''$ , što se može primijetiti ako uočimo da vrijedi  $-1 + u_n = -u_{-n-1}$ . Zaista, za  $n \geq 0$  obje strane ove jednakosti jednake su 0, dok su za  $n < 0$  obje strane jednake  $-1$ .