

Ovaj problem bi se najlakše riješio ukoliko se prethodno nacrtat će graf koji modelira postavljeni problem, s obzirom da slikovna reprezentacija pomaže da se lakše uoče povećavajući putevi u odgovarajućoj transportnoj mreži. Međutim, ovdje će problem biti riješen “naslijepo” (tj. bez crteža), radi ilustracije kako bi se Ford-Fulkersonov algoritam mogao implementirati recimo na računaru.

Podaci koji su dati u postavci zapravo su grane transportne mreže zajedno sa njihovim kapacitetima. Kako ova mreža ima 3 izvora (S_1 , S_2 i S_3), uvećemo fiktivni superizvor SI i dodati tri grane od SI do S_1 , S_2 i S_3 sa beskonačnim kapacitetima. Nakon toga ćemo podatke koje imamo organizirati na način koji je pogodniji za izvršavanje algoritma. Za svaki od čvorova ove mreže, izlistaćemo sve njegove susjede, zajedno sa rezervama odgovarajućih grana, tj. razlikama između njihovih kapaciteta i trenutnog protoka kroz njih (kako su na početku svi protoci kroz grane jednaki nuli, početne vrijednosti rezervi zapravo su jednakе kapacitetima grana). Pored susjeda, za svaki čvor izlistaćemo i njegove “inverzne susjede”, tj. čvorovi koji bi mu bili susjadi kada bismo prevnuli orijentacije grana. Da bismo razlikovali susjede i inverzne susjede, inverzne susjede ćemo prikazivati u zagradama. Uz inverzne susjede ćemo također prikazati i protok kroz granu koja vodi od inverznog susjeda do razmatranog čvora (na početku, svi su ti protoci jednaki nuli). Na taj način, dolazimo do sljedeće reprezentacije:

$SI:$	$S_1/\infty, S_2/\infty, S_3/\infty$
$S_1:$	$(SI/0), R_1/30$
$S_2:$	$(SI/0), R_1/30, R_2/20$
$S_3:$	$(SI/0), R_2/50, R_3/50$
$R_1:$	$(S_1/0), (S_2/0), R_4/40$
$R_2:$	$(S_2/0), (S_3/0), (R_3/0), R_5/50, R_8/20$
$R_3:$	$(S_3/0), R_2/40, R_6/20$
$R_4:$	$(R_1/0), R_5/80, R_7/40$
$R_5:$	$(R_2/0), (R_4/0), (R_6/0), K/100$
$R_6:$	$(R_3/0), R_5/30, R_8/60$
$R_7:$	$(R_4/0), K/100$
$R_8:$	$(R_2/0), (R_6/0), K/100$
$K:$	$(R_5/0), (R_7/0), (R_8/0)$

Sve dalje korake algoritma ćemo obavljati pomoću manipulacija sa ovakvom reprezentacijom mreže. Glavna pogodnost ove reprezentacije je u činjenici da se iz nje u svakom trenutku odmah može očitati rezidualni graf. Zaista, iz definicije rezidualnog grafa odmah vidimo da se rezidualni graf dobija ukoliko smatramo da su susjadi nekog čvora oni i samo oni susjadi i inverzni susjadi iz ovako formiranog spiska kojima odgovara pridružena vrijednost različita od nule, dok se oni susjadi i inverzni susjadi kojima je pridružena vrijednost 0 ignoriraju kao da ne postoje.

Sada je potrebno pronaći povećavajući put kroz transportnu mrežu. To ćemo uraditi primjenom BFS pretrage (naslijepo) da nađemo put sa najmanjim brojem grana od izvora SI do ponora K kroz odgovarajući rezidualni graf, tj. ignorirajući čvorove uz koje je pridružena vrijednost 0. Krećemo od čvora SI . Njegovi susjadi su S_1 , S_2 i S_3 , pa dodajemo grane (SI, S_1) , (SI, S_2) i (SI, S_3) u BFS stablo. Susjed od S_1 je R_1 pa dodajemo granu (S_1, R_1) u BFS stablo. Susjadi od S_2 su R_1 i R_2 , ali kako je R_1 već razmotren, samo granu (S_2, R_2) dodajemo u BFS stablo. Isto tako, susjadi od S_3 su R_2 i R_3 , ali R_2 je već razmotren, tako da dodajemo samo granu (S_3, R_3) u BFS stablo. Nastavljamo dalje od “listova” dosada formiranog stabla, tj. od čvorova R_1 , R_2 i R_3 . Jedini susjed od R_1 je R_4 i nije dosada razmatran, tako da dodajemo granu (R_1, R_4) u BFS stablo. Čvor R_2 ima susjede R_5 i R_8 koji nisu razmatrani, tako da u stablo ulaze grane (R_2, R_5) i (R_2, R_8) . Čvor R_3 ima susjeda R_2 koji je već razmatran, kao i susjeda R_6 koji nije razmatran, tako da dodajemo granu (R_3, R_6) u stablo. Dalje nastavljamo od novih listova R_4 , R_5 , R_8 i R_6 . Čvor R_4 ima već razmotrenog susjeda R_5 i susjeda R_7 koji nije dosada razmatran, tako da grana (R_4, R_7) ulazi u BFS stablo. Čvor R_5 kao jedinog susjeda ima čvor K koji nije razmatran, tako da u BFS stablo ulazi i grana (R_5, K) . Kako smo dostigli čvor K koji je ponor, dalji tok BFS pretrage možemo prekinuti.

Praćenjem grana formiranog BFS stabla od čvora K unazad direktno očitavamo povećavajući put $SI - S_2 - R_2 - R_5 - K$. Sad je potrebno pronaći iznos Δ za koliko se protok može povećati pomoću ovog povećavajućeg puta. Δ ćemo naći kao minimum svih vrijednosti pridruženih granama duž ovog povećavajućeg puta, tj. $\Delta = \min \{\infty, 20, 50, 100\} = 20$.

U nastavku, povećavamo protok za iznos $\Delta = 20$ smanjujući sve rezerve duž odgovarajućih grana za iznos Δ , odnosno povećavajući protoke duž odgovarajućih grana za iznos Δ . Pri tome, trebamo voditi računa da je korekciju za svaku granu u reprezentaciji mreže koju koristimo potrebno obaviti na dva mjesta, jer je svaka granica predstavljena na dva mjesta. Na primjer, uzimimo granu (S_2, R_2) . Ova granica je predstavljena činjenicom da čvor S_2 ima čvor R_2 za susjeda. Stoga ćemo rezervu te grane naznačenu uz čvor R_2 u spisku susjeda i inverznih susjeda čvora S_2 umanjiti za 20. Međutim, isto tako ta granica je predstavljena i činjenicom da čvor R_2 ima čvor S_2 za inverzniog susjeda. Stoga ćemo protok naznačen uz čvor S_2 u spisku susjeda i inverznih susjeda čvora R_2 uvećati za 20. Kada izvršimo takve korekcije i za sve ostale grane, novo stanje mreže prikazano je sljedećom reprezentacijom:

SI:	$S_1/\infty, S_2/\infty, S_3/\infty$
S_1 :	$(SI/0), R_1/30$
S_2 :	$(SI/20), R_1/30, R_2/0$
S_3 :	$(SI/0), R_2/50, R_3/50$
R_1 :	$(S_1/0), (S_2/0), R_4/40$
R_2 :	$(S_2/20), (S_3/0), (R_3/0), R_5/30, R_8/20$
R_3 :	$(S_3/0), R_2/40, R_6/20$
R_4 :	$(R_1/0), R_5/80, R_7/40$
R_5 :	$(R_2/20), (R_4/0), (R_6/0), K/80$
R_6 :	$(R_3/0), R_5/30, R_8/60$
R_7 :	$(R_4/0), K/100$
R_8 :	$(R_2/0), (R_6/0), K/100$
K:	$(R_5/20), (R_7/0), (R_8/0)$

Sada je potrebno ponoviti isti postupak, odnosno tražimo put kroz rezidualni graf od izvora SI do ponora K, samo što će ovaj put biti drugačiji “raspored susjeda” (u odnosu na rezidualni graf). Naime, neke grane su postale “neprohodne” jer su vrijednosti naznačene uz pojedine susjede koje ranije nisu bile nula sada postale jednake nuli, dok su, s druge strane, neke grane koje su ranije bile neprohodne sada postale “prohodne”, jer su vrijednosti naznačene uz pojedine inverzne susjede koje su ranije bile jednake nuli sad različite od nule.

Ponovo krećemo od čvora SI. Njegovi susjedi su i dalje S_1, S_2 i S_3 , pa dodajemo grane $(SI, S_1), (SI, S_2)$ i (SI, S_3) u BFS stablu. Također, i dalje je jedini susjed od S_1 čvor R_1 pa dodajemo granu (S_1, R_1) u BFS stablu. Međutim, sada su susjedi od S_2 čvorovi SI i R_1 , od kojih su oba već razmotrena, tako da ne dodajemo ništa u stablu. Čvor S_3 i dalje ima R_2 i R_3 za susjede, tako da dodajemo grane (S_3, R_2) i (S_3, R_3) u BFS stablu. Postupak dalje nastavljamo od listova R_1, R_2 i R_3 . Susjed od R_1 je R_4 i kako nije dosada razmatran, dodajemo granu (R_1, R_4) u BFS stablu. R_2 ima za susjede S_2, R_5 i R_8 . Među njima, S_2 je već razmatran, tako da u BFS stablu ulaze grane (R_2, R_5) i (R_2, R_8) . Čvor R_3 ima već razmotrenog susjeda R_2 i susjeda R_6 koji nije razmatran, tako da dodajemo granu (R_3, R_6) u stablu. Dalje nastavljamo od novih listova R_4, R_5, R_8 i R_6 . R_4 ima susjeda R_5 koji je već razmotren i susjeda R_7 koji nije dosada razmatran, tako da grana (R_4, R_7) ulazi u BFS stablu. Susjed K čvora R_5 nije razmatran, tako da u BFS stablu ulazi i grana (R_5, K) . Dostigli smo ponor K, te pretragu možemo prekinuti.

Odgovarajući povećavajući put glasi $SI - S_3 - R_2 - R_5 - K$. Duž ovog povećavajućeg puta, protok se može povećati za iznos $\Delta = \min \{\infty, 50, 30, 80\} = 30$. Stoga, povećavamo protok za iznos $\Delta = 20$ smanjujući sve rezerve duž odgovarajućih grana za iznos Δ , odnosno povećavajući protoke duž odgovarajućih grana za iznos Δ . Kada izvršimo takve korekcije i za sve ostale grane, novo stanje mreže prikazano je sljedećom reprezentacijom:

SI:	$S_1/\infty, S_2/\infty, S_3/\infty$
$S_1:$	$(SI/0), R_1/30$
$S_2:$	$(SI/20), R_1/30, R_2/0$
$S_3:$	$(SI/30), R_2/20, R_3/50$
$R_1:$	$(S_1/0), (S_2/0), R_4/40$
$R_2:$	$(S_2/20), (S_3/30), (R_3/0), R_5/0, R_8/20$
$R_3:$	$(S_3/0), R_2/40, R_6/20$
$R_4:$	$(R_1/0), R_5/80, R_7/40$
$R_5:$	$(R_2/50), (R_4/0), (R_6/0), K/50$
$R_6:$	$(R_3/0), R_5/30, R_8/60$
$R_7:$	$(R_4/0), K/100$
$R_8:$	$(R_2/0), (R_6/0), K/100$
K:	$(R_5/50), (R_7/0), (R_8/0)$

Nastavljamo sa traženjem novih povećavajućih puteva. Susjedi od SI su S_1, S_2 i S_3 , pa dodajemo grane $(SI, S_1), (SI, S_2)$ i (SI, S_3) u BFS stablo. Jedini susjed od S_1 je R_1 pa dodajemo granu (S_1, R_1) u stablo. Susjedi od S_2 su SI i R_1 , ali oba su već razmotrena. Čvor S_3 sada za susjede ima SI, R_2 i R_3 od kojih je SI već razmotren, tako da u stablo ulaze grane (S_3, R_2) i (S_3, R_3) . Nastavljamo od listova R_1, R_2 i R_3 . Susjed od R_1 je R_4 i nije razmatran, pa dodajemo granu (R_1, R_4) u stablo. R_2 sada ima za susjede S_2, S_3 i R_8 od kojih samo R_8 nije razmatran, tako da u stablo ulazi grana (R_2, R_8) . R_3 ima za susjede R_2 i R_6 od kojih R_6 nije razmatran, tako da dodajemo granu (R_3, R_6) u stablo. Nastavljamo dalje od novih listova R_4, R_8 i R_6 . R_4 ima susjede R_5 i R_7 koji nisu razmatrani, pa grane (R_4, R_5) i (R_4, R_7) ulaze u stablo. R_8 za jedinog susjeda ima ponor K, tako da dodajemo granu (R_8, K) u stablo. Ponor K je sada dosegnut, te se pretraga prekida.

Odgovarajući povećavajući put glasi $SI - S_3 - R_2 - R_8 - K$. Duž ovog puta, protok se može povećati za iznos $\Delta = \min \{\infty, 20, 20, 100\} = 20$. Nakon obavljanja odgovarajućih korekcija, dobijamo stanje mreže koje se može prikazati sljedećom reprezentacijom:

SI:	$S_1/\infty, S_2/\infty, S_3/\infty$
$S_1:$	$(SI/0), R_1/30$
$S_2:$	$(SI/20), R_1/30, R_2/0$
$S_3:$	$(SI/50), R_2/0, R_3/50$
$R_1:$	$(S_1/0), (S_2/0), R_4/40$
$R_2:$	$(S_2/20), (S_3/50), (R_3/0), R_5/0, R_8/0$
$R_3:$	$(S_3/0), R_2/40, R_6/20$
$R_4:$	$(R_1/0), R_5/80, R_7/40$
$R_5:$	$(R_2/50), (R_4/0), (R_6/0), K/50$
$R_6:$	$(R_3/0), R_5/30, R_8/60$
$R_7:$	$(R_4/0), K/100$
$R_8:$	$(R_2/20), (R_6/0), K/80$
K:	$(R_5/50), (R_7/0), (R_8/20)$

Nastavljamo dalje sa traženjem povećavajućih puteva. Kao i dosada, u BFS stablo prvo ulaze grane $(SI, S_1), (SI, S_2)$ i (SI, S_3) . Čvor S_1 ima neobrađeni čvor R_1 za susjeda, tako da grana (S_1, R_1) ulazi u stablo. Oba susjeda SI i R_1 čvora S_2 su već obrađena. S_3 ima već obrađenog susjeda SI i neobrađenog susjeda R_3 , tako da dodajemo granu (S_3, R_3) u stablo. Nastavljamo od listova R_1 i R_3 . R_1 ima za susjeda R_4 , tako da grana (R_1, R_4) ide u stablo, dok R_3 ima za susjede R_2 i R_6 koji nisu dosada obrađeni, tako da u stablo ulaze grane (R_3, R_2) i (R_3, R_6) . Pretraga se nastavlja od listova R_4, R_2 i R_6 . R_4 za susjede ima R_5 i R_7 koji nisu obrađivani, tako da se grane (R_4, R_5) i (R_4, R_7) dodaju u stablo. Oba susjeda S_2 i S_3 čvora R_2 su već obrađena, dok R_6 ima već obrađenog susjeda R_5 i neobrađenog susjeda R_8 , dako da u stablo ulazi grana (R_6, R_8) . Dalje nastavljamo od listova R_5, R_7 i R_8 . Čvor R_5 za susjede ima već obrađeni čvor R_2 i neobrađeni čvor K, tako da grana (R_5, K) ulazi u stablo. Pretraga se završava, jer je dostignut ponor K.

Odgovarajući povećavajući put sada je $SI - S_1 - R_1 - R_4 - R_5 - K$. Duž ovog puta, protok se može povećati za iznos $\Delta = \min \{\infty, 30, 40, 80, 50\} = 30$. Nakon obavljanja odgovarajućih korekcija, novo stanje mreže može se prikazati sljedećom reprezentacijom:

SI:	$S_1/\infty, S_2/\infty, S_3/\infty$
S_1 :	$(SI/30), R_1/0$
S_2 :	$(SI/20), R_1/30, R_2/0$
S_3 :	$(SI/50), R_2/0, R_3/50$
R_1 :	$(S_1/30), (S_2/0), R_4/10$
R_2 :	$(S_2/20), (S_3/50), (R_3/0), R_5/0, R_8/0$
R_3 :	$(S_3/0), R_2/40, R_6/20$
R_4 :	$(R_1/30), R_5/50, R_7/40$
R_5 :	$(R_2/50), (R_4/30), (R_6/0), K/20$
R_6 :	$(R_3/0), R_5/30, R_8/60$
R_7 :	$(R_4/0), K/100$
R_8 :	$(R_2/20), (R_6/0), K/80$
K:	$(R_5/80), (R_7/0), (R_8/20)$

Nastavljamo dalje traganje za povećavajućim putevima. Na potpuno isti način kao i dosada, zaključujemo da u BFS stablo redom ulaze grane (SI, S_1) , (SI, S_2) , (SI, S_3) , (S_2, R_1) , (S_3, R_3) , (R_1, R_4) , (R_3, R_2) , (R_3, R_6) , (R_4, R_5) , (R_4, R_7) , (R_6, R_8) i (R_5, K) . U tom trenutku pretraga se prekida, jer je dostignut čvor K.

Odgovarajući povećavajući put je $SI - S_2 - R_1 - R_4 - R_5 - K$, duž kojeg se protok može povećati za iznos $\Delta = \min \{\infty, 30, 10, 50, 20\} = 10$. Nakon što izvršimo korekcije, dobijamo stanje koje odgovara sljedećoj reprezentaciji:

SI:	$S_1/\infty, S_2/\infty, S_3/\infty$
S_1 :	$(SI/30), R_1/0$
S_2 :	$(SI/30), R_1/20, R_2/0$
S_3 :	$(SI/50), R_2/0, R_3/50$
R_1 :	$(S_1/30), (S_2/10), R_4/0$
R_2 :	$(S_2/20), (S_3/50), (R_3/0), R_5/0, R_8/0$
R_3 :	$(S_3/0), R_2/40, R_6/20$
R_4 :	$(R_1/40), R_5/40, R_7/40$
R_5 :	$(R_2/50), (R_4/40), (R_6/0), K/10$
R_6 :	$(R_3/0), R_5/30, R_8/60$
R_7 :	$(R_4/0), K/100$
R_8 :	$(R_2/20), (R_6/0), K/80$
K:	$(R_5/90), (R_7/0), (R_8/20)$

U sljedećoj iteraciji traganja za povećavajućim putevima, u BFS stablo redom ulaze grane (SI, S_1) , (SI, S_2) , (SI, S_3) , (S_2, R_1) , (S_3, R_3) , (R_3, R_2) , (R_3, R_6) , (R_6, R_5) , (R_6, R_8) i (R_5, R_4) i (R_8, K) . Kako je time dostignut čvor K, dalja pretraga se prekida. Interesantno je primjetiti da je grana (R_5, R_4) krivo usmjerena grana u odnosu na polaznu transportnu mrežu. Zaista, vidimo da čvor R_4 inverzni susjed a ne susjed čvora R_5 posmatranu u odnosu na polaznu transportnu mrežu.

Sada je odgovarajući povećavajući put $SI - S_3 - R_3 - R_6 - R_8 - K$, duž kojeg se protok može povećati za iznos $\Delta = \min \{\infty, 50, 20, 60, 80\} = 20$. Nakon što izvršimo odgovarajuće korekcije, dobijamo novo stanje koje se može predstaviti sljedećom reprezentacijom:

SI:	$S_1/\infty, S_2/\infty, S_3/\infty$
S_1 :	$(SI/30), R_1/0$
S_2 :	$(SI/30), R_1/20, R_2/0$
S_3 :	$(SI/70), R_2/0, R_3/30$
R_1 :	$(S_1/30), (S_2/10), R_4/0$
R_2 :	$(S_2/20), (S_3/50), (R_3/0), R_5/0, R_8/0$
R_3 :	$(S_3/20), R_2/40, R_6/0$
R_4 :	$(R_1/40), R_5/40, R_7/40$
R_5 :	$(R_2/50), (R_4/40), (R_6/0), K/10$
R_6 :	$(R_3/20), R_5/30, R_8/40$
R_7 :	$(R_4/0), K/100$
R_8 :	$(R_2/20), (R_6/20), K/60$
K:	$(R_5/90), (R_7/0), (R_8/40)$

Pokušajmo naći još povećavajućih puteva. Kao i do sada, prve grane koje će ući u BFS stablo su (SI, S_1) , (SI, S_2) i (SI, S_3) . Jedini trenutni susjed čvora S_1 je SI, koji je već razmotren. S_2 ima susjede SI i R_1 od kojih R_1 nije razmotren, pa dodajemo granu (S_2, R_1) u stablo. Slično, dodajemo i granu (S_3, R_3) . Nastavljamo od listova R_1 i R_3 . Oba susjeda S_1 i S_2 čvora R_1 su već obrađeni. R_3 ima neobrađenog susjeda R_2 , pa grana (R_3, R_2) ulazi u stablo. Sada bismo pretragu trebali nastaviti od jedinog preostalog lista R_2 . Međutim, R_2 nema neobrađenih susjeda, pa se time pretraga obustavlja. Kako ponor K nije dostignut, to znači da su iscrpljeni svi povećavajući putevi, odnosno nema više novih povećavajućih puteva.

Sada možemo očitati optimalnu raspodjelu protoka. Najlakše je to obaviti oduzimanjem postignutih vrijednosti rezervi kroz pojedine grane koje su vidljive iz gornje reprezentacije od kapaciteta grana koje su zadane na početku. Time se dobija sljedeća raspodjela protoka:

$$\begin{array}{llllll} (S_1, R_1, 30) & (S_2, R_1, 10) & (S_2, R_2, 20) & (S_3, R_2, 50) & (S_3, R_3, 20) & (R_1, R_4, 40) \\ (R_2, R_5, 50) & (R_2, R_8, 20) & (R_3, R_2, 0) & (R_3, R_6, 20) & (R_4, R_5, 40) & (R_4, R_7, 0) \\ (R_5, K, 90) & (R_6, R_5, 0) & (R_6, R_8, 20) & (R_7, K, 0) & (R_8, K, 40) & \end{array}$$

Ova raspodjela predstavlja tražene aktuelne brzine prenosa podataka kroz svaki od navedenih raspoloživih komunikacionih kanala. Ukupan protok, odnosno maksimalnu brzinu kojom klijent može izvršiti download posmatrane datoteke možemo dobiti sabiranjem protoka koji izlaze iz svih izvora, ili sabiranjem protoka koji ulaze u izvor. U oba slučaja dobijamo istu vrijednost 130 Mbita/s, bilo kao $30 + 10 + 20 + 50 + 20 = 30$, bilo kao $90 + 0 + 40 = 130$.

Napomena: Gore prikazana raspodjela protoka nije i jedina moguća koja daje optimalnu vrijednost ukupnog protoka. Druge raspodjele mogu se dobiti drugačijim redoslijedom obrade listova prilikom traženja povećavajućih puteva BFS pretragom kroz rezidualne grafove. Naravno, sve takve raspodjele moraju dati istu maksimalnu vrijednost ukupnog protoka.