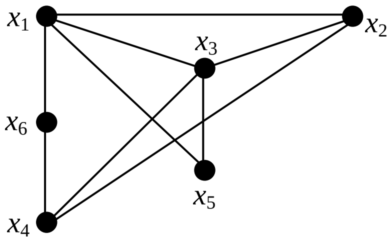
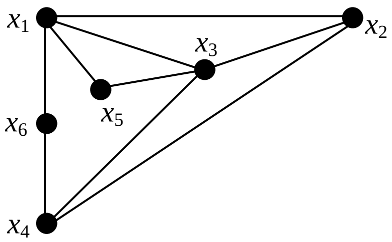
Graf sa prve (lijeve) slike jeste planaran, jer se lako može nacrtati bez presjecanja grana. Recimo, prvo je moguće spriječiti presjecanje grane $\{x_1, x_6\}$ sa drugim granama, tako što ćemo pomjeriti poziciju čvora x_6, kao na sljedećoj slici:



Nakon toga, možemo pomjeriti poziciju čvora x_5 da spriječimo presjecanje grana $\{x_1, x_5\}$ i $\{x_3, x_5\}$ sa drugim granama. Time dobijamo sljedeću sliku na kojoj više ne dolazi do presjecanja grana:



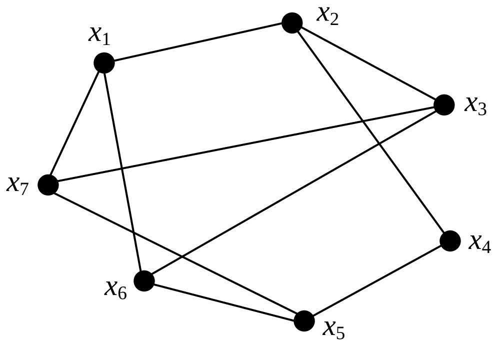
Ovim je pokazano da je razmatrani graf planaran.

Što se tiče grafa sa druge (desne) slike, ne vidi se nikakav očigledan način da se on nacrta bez presjecanja grana. Provjerimo prvo preko Eulerove teoreme da li ovaj graf uopće može biti planaran. Na osnovu Eulerove teoreme, slijedi da planaran graf sa n čvorova može imati najviše $3n-6$ grana. U našem slučaju je $n = 7$ i $3n-6 = 15$. Kako razmatrani graf ima 12 grana, prema Eulerovoj teoremi on bi mogao biti planarni. S obzirom da Eulerova teorema daje samo neophodne uvjete za planarnost, njeno ispunjenje ne znači da graf zaista jeste planaran. Međutim, kako brojni pokušaji da se graf nacrta bez presjecanja grana ne uspjevaju, to navodi na sumnju da graf nije planaran.

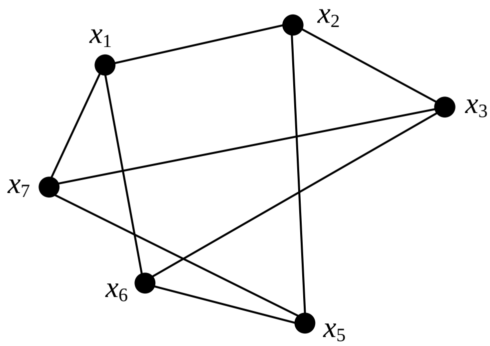
Da bismo dokazali da ovaj graf zaista nije planaran, moramo se pozvati ili na teoremu Pontrjagin-Kuratowskog, ili na Wagnerovu teoremu. Pokušajmo prvo dokazati neplanarnost pomoću teoreme Pontrjagin-Kuratowskog. Trebamo potražiti da li razmatrani graf sadrži kao djelimični podgraf potpodjelu od K_5 ili potpodjelu od $K_{3,3}$.

Odmah treba biti jasno da razmatrani graf ne može sadržavati potpodjelu od K_5. Zaista, graf K_5 ima ukupno 5 čvorova, a iz svakog od njih izlaze po 4 grane. Kako naš graf nema barem 5 čvorova iz kojih izlaze barem 4 grane (postoje 3 čvora iz kojih izlaze tačno 4 grane, dok iz preostala 4 čvora izlaze po 3 grane), nemoguće je ikakvim izbacivanjem čvorova i grana iz ovog grafa dobiti potpodjelu od $K_{5.}$

Preostaje da potražimo eventualnu potpodjelu od $K_{3,3}$. Da ne bismo tražili posve naslijepo, krenimo od toga kako graf $K_{3,3}$ izgleda. On ima ukupno 6 čvorova, a iz svakog od njih izlaze po 3 grane. Slijedi da ima smisla uklanjati samo grane koje izlaze iz čvorova iz kojih izlaze barem 4 grane. U razmatranom grafu, takvi su čvorovi x_1, x_3 i x_7. Sad uz malo eksperimentisanja, lako možemo pronaći traženu potpodjelu. Zaista, uklonimo li iz polaznog grafa grane $\{x_1, x_3\}$ i $\{x_4, x_7\}$, dobijamo graf sa sljedeće slike, koji je potpodjela od $K_{3,3}$ (ovdje je x_4 dodatni čvor koji je ubačen duž "grane" koja spaja čvorove x_2 i x_5 sa ciljem da se formira potpodjela):



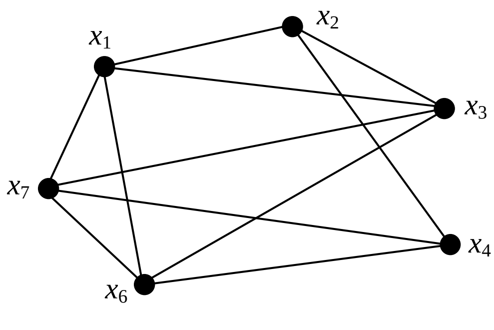
Da bismo se uvjerili da je ovo zaista potpodjela grafa $K_{3,3}$, nacrtaćemo ponovo sliku u kojoj su grane $\{x_2, x_4\}$ i $\{x_4, x_5\}$ spojene u jednu granu (tj. eliminiran je čvor x_4 koji tvori potpodjelu):



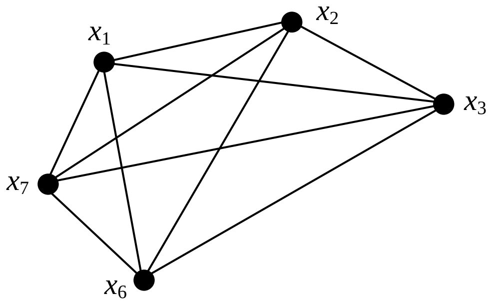
Sada se lako može vidjeti da se zaista radi o grafu $K_{3,3}$. Recimo, moguću biparticiju ovog grafa čine skupovi čvorova $X_1 = \{x_1, x_3, x_5\}$ i $X_2 = \{x_2, x_6, x_7\}$. Vidi se da su svi čvorovi iz skupa X_1 spojeni granama sa svim čvorovima iz skupa X_2 i obratno, dok nikoja dva čvora iz skupa X_1 odnosno X_2 nisu međusobno spojena. Dakle, razmatrani graf zaista nije planaran.

Pokažimo kako do istog zaključka možemo doći pomoću Wagnerove teoreme. Kako razmatrani graf ima 7 čvorova a graf $K_{3,3}$ ima 6 čvorova, tada ako bi se razmatrani graf mogao kontrakcijom svesti na $K_{3,3}$ ta bi kontrakcija morala biti samo duž jedne grane. Međutim, isprobavanjem kontrakcija duž svih postojećih grana lako možemo vidjeti da nikada nećemo dobiti neki graf koji je $K_{3,3}$ ili sadrži $K_{3,3}$ kao podgraf. U to se možemo uvjeriti i bez mukotrpnih isprobavanja. Naime, početni graf sadrži nekoliko ciklusa dužine 3, i zbog toga on ne može biti 2-obojiv. Primjeri takvih ciklusa su $x_1 - x_2 - x_3 - x_1$ i $x_4 - x_5 - x_7 - x_4$. Ova dva ciklusa nemaju zajedničkih grana. Zbog toga, kontrakcijom duž ma koje od grana možemo eventualno ukloniti jedan od njih, ali ne i oba. Dakle, kontrakcijom duž ma koje od grana graf i dalje neće biti 2-obojiv. Kako je graf $K_{3,3}$ 2-obojiv, slijedi da je nemoguće kontrakcijom duž samo jedne grane dobiti $K_{3,3}$ niti nešto što sadrži $K_{3,3}$ kao podgraf. Dakle, ovaj graf je nemoguće kontrakcijama svesti na $K_{3,3}$.

Pokušajmo sada kontrakcijama svesti ovaj graf na K_5. Ako takve kontrakcije postoje, potrebne su dvije kontrakcije, duž dvije različite grane. Kako u grafu K_5 iz svakog od čvora izlaze po 4 grane, probajmo kontrakcijama stopiti čvorove iz kojih izlazi manje od 4 grane. Recimo, kontrakcijom duž grane $\{x_4, x_5\}$ dobijamo graf kao na sljedećoj slici:



Preostala su još 2 čvora iz kojih izlaze samo 3 grane (čvorovi x_2 i x_4). Spojimo i njih kontrakcijom, tj. izvršimo kontrakciju duž grane $\{x_2, x_4\}$. Time dobijamo graf sa sljedeće slike:



Međutim, graf koji smo upravo dobili nije ništa drugo nego graf K_5. Ovim smo putem Wagnerove teoreme dokazali da razmatrani graf nije planaran.