

Da bismo pojednostavili terminologiju i notaciju, ignoriraćemo u potpunosti sve projekte koji su promašili avion i označićemo sa A_i , B_i , i C_i redom sljedeće događaje:

A_i – i -ti projektil koji je pogodio avion pogodio je u kabinu

B_i – i -ti projektil koji je pogodio avion pogodio je u krila

C_i – i -ti projektil koji je pogodio avion pogodio je u trup

Tada iz postavke zadatka neposredno slijedi $p(A_i) = 0.05$, $p(B_i) = 0.2$ i $p(C_i) = 0.75$ neovisno od i . Da nismo tako postupili, morali bismo uvoditi uvjetne vjerovatnoće tipa “vjerovatnoća da je i -ti projektil pogodio u kabinu pod uvjetom da je on uopće pogodio avion”. Ovo bi znatno zakomplikovalo terminologiju i notaciju koja bi se koristila za rješavanje zadatka, mada se sam način rješavanja u osnovi ne bi promijenio.

- a) Jedan pogodak će oboriti avion ako i samo ako je pogodak u kabinu, tako da tražena vjerovatnoća u ovom slučaju iznosi

$$p = p(A_1) = 0.05 = 5\%$$

- b) Dva pogotka će oboriti avion ako i samo ako oba pogode u krila, što je događaj B_1B_2 , ili ako barem jedan pogodi u kabinu, što je događaj $A_1 + A_2$. Kako su događaji B_1 i B_2 nezavisni (s obzirom da ishod ma kojeg gađanja ne ovisi o ishodu prethodnih gađanja), to je

$$p(B_1B_2) = p(B_1)p(B_2) = 0.2 \cdot 0.2 = 0.04$$

Slično, kako su događaji A_1 i A_2 nezavisni, slijedi

$$\begin{aligned} p(A_1 + A_2) &= p(A_1) + p(A_2) - p(A_1A_2) = p(A_1) + p(A_2) - p(A_1)p(A_2) = \\ &= 2 \cdot 0.05 + 0.05 - 0.05^2 = 0.1 - 0.0025 = 0.0975 \end{aligned}$$

Ova vjerovatnoća se mogla izračunati i preko vjerovatnoće suprotnog događaja, tj. događaja $\bar{A}_1\bar{A}_2$ da niti jedan pogodak nije u kabinu:

$$\begin{aligned} p(A_1 + A_2) &= 1 - p(\bar{A}_1 + \bar{A}_2) = 1 - p(\bar{A}_1\bar{A}_2) = 1 - p(\bar{A}_1)p(\bar{A}_2) = \\ &= 1 - (1 - p(A_1))(1 - p(A_2)) = 1 - (1 - 0.05)^2 = 1 - 0.95^2 = 1 - 0.9025 = 0.0975 \end{aligned}$$

Na kraju, zbog međusobne isključivosti događaja B_1B_2 i $A_1 + A_2$, tražena vjerovatnoća iznosi:

$$p = p(B_1B_2 + A_1 + A_2) = p(B_1B_2) + p(A_1 + A_2) = 0.04 + 0.0975 = 0.1375 = 13.75\%$$

Ukoliko nekome nije očigledna međusobna isključivost događaja B_1B_2 i $A_1 + A_2$, u to se formalno možemo uvjeriti ovako:

$$B_1B_2(A_1 + A_2) = B_1B_2A_1 + B_1B_2A_2 = A_1B_1B_2 + B_1B_2A_2 = OB_2 + B_1O = O + O = O$$

Zaista, događaji A_1 i B_1 te A_2 i B_2 su očigledno međusobno isključivi.

- c) U ovom slučaju je znatno lakše prvo izračunati vjerovatnoću p' suprotnog događaja (tj. da avion ne bude oboren), jer ima manje načina kako se to može desiti. Naime, sa 3 pogotka jedini način da avion ne bude oboren je da dva od tri pogotka budu u trup, a jedan u krila. Zbog neovisnosti gađanja, vjerovatnoća da prvi pogodak bude u krila a druga dva u trup iznosi

$$p(B_1C_2C_3) = p(B_1)p(C_2)p(C_3) = 0.2 \cdot 0.75^2 = 0.1125$$

Iste su vjerovatnoće i za događaje kada je drugi pogodak bio u krilo (događaj $C_1B_2C_3$) odnosno kada je treći pogodak bio u krilo (događaj $C_1C_2B_3$). Kako su događaji $B_1C_2C_3$, $C_1B_2C_3$ i $C_1C_2B_3$ očigledno međusobno isključivi, vjerovatnoća da neki od tri pogotka bude u krilo a druga dva u trup iznosi

$$\begin{aligned} p' &= p(B_1C_2C_3 + C_1B_2C_3 + C_1C_2B_3) = p(B_1C_2C_3) + p(C_1B_2C_3) + p(C_1C_2B_3) = \\ &= 3 \cdot 0.1125 = 0.3375 \end{aligned}$$

Kako je ovo zapravo vjerovatnoća da avion ne bude oboren, tražena vjerovatnoća da avion bude oboren iznosi

$$p = 1 - p' = 1 - 0.3375 = 0.6625 = 66.25 \%$$

Interesantno je pokazati kako bi se do istog rezultata moglo doći direktnim putem, odnosno bez razmatranja suprotnog događaja, s obzirom da je tu moguće napraviti mnogo pogrešaka na koje ćemo ukazati. Razmotrimo prvo kako sve može biti oboren avion sa tri pogotka. Prva mogućnost je da je od ta tri pogotka barem jedan pogodak bude u kabinu, što je događaj $A_1 + A_2 + A_3$. Njegova vjerovatnoća je:

$$\begin{aligned} p(A_1 + A_2 + A_3) &= p(A_1 + A_2) + p(A_3) - p((A_1 + A_2) A_3) = \\ &= p(A_1) + p(A_2) - p(A_1A_2) + p(A_3) - p(A_1A_3 + A_2A_3) = \\ &= p(A_1) + p(A_2) - p(A_1)p(A_2) + p(A_3) - p(A_1A_3) - p(A_2A_3) + p(A_1A_2A_3) = \\ &= p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) - p(A_1)p(A_2) - p(A_1)p(A_3) - p(A_2)p(A_3) + p(A_1)p(A_2)p(A_3) = \\ &= 3 \cdot 0.05 - 3 \cdot 0.05^2 + 0.05^3 = 0.15 - 0.0075 + 0.000125 = 0.142625 \end{aligned}$$

Ovu vjerovatnoću možemo brže naći preko vjerovatnoće suprotnog događaja $\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$ što je događaj da niti jedan od tri pogotka nije u kabinu:

$$\begin{aligned} p(A_1 + A_2 + A_3) &= 1 - p(\overline{A_1 + A_2 + A_3}) = 1 - p(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3) = 1 - p(\bar{A}_1)p(\bar{A}_2)p(\bar{A}_3) = \\ &= 1 - (1 - p(A_1))(1 - p(A_2))(1 - p(A_3)) = 1 - (1 - 0.05)^3 = 1 - 0.857375 = 0.142625 \end{aligned}$$

Druga mogućnost je da od tri pogotka barem dva pogotka budu u krilo, što se može predstaviti kao događaj $B_1B_2 + B_1B_3 + B_2B_3$. Njegova vjerovatnoća iznosi:

$$\begin{aligned} p(B_1B_2 + B_1B_3 + B_2B_3) &= p(B_1B_2 + B_1B_3) + p(B_2B_3) - p((B_1B_2 + B_1B_3) B_2B_3) = \\ &= p(B_1B_2) + p(B_1B_3) - p(B_1B_2B_3) + p(B_2B_3) - p(B_1B_2B_3 + B_1B_2B_3) = \\ &= p(B_1)p(B_2) + p(B_1)p(B_3) + p(B_2)p(B_3) - 2p(B_1B_2B_3) = \\ &= p(B_1)p(B_2) + p(B_1)p(B_3) + p(B_2)p(B_3) - 2p(B_1)p(B_2)p(B_3) = \\ &= 3 \cdot 0.2^2 - 2 \cdot 0.2^3 = 0.12 - 0.016 = 0.104 \end{aligned}$$

Treba uočiti da ova vjerovatnoća nije prosto zbir vjerovatnoća događaja B_1B_2 , B_1B_3 i B_2B_3 (odnosno trostruka vjerovatnoća događaja B_1B_2), s obzirom da ova tri događaja nisu međusobno isključivi. Treća mogućnost je da sva tri pogotka budu u trup, što je događaj $C_1C_2C_3$. Njegova vjerovatnoća iznosi:

$$p(C_1C_2C_3) = p(C_1)p(C_2)p(C_3) = 0.75^3 = 0.421875$$

Ova tri događaja $A_1 + A_2 + A_3$, $B_1B_2 + B_1B_3 + B_2B_3$ i $C_1C_2C_3$ zaista pokrivaju sve načine kako avion može biti oboren sa tri pogotka. Međutim, tu nije kraj priče, odnosno vjerovatnoća obaranja aviona nije jednaka zbiru vjerovatnoće ova tri događaja. Problem je u tome što se neki od ovih događaja preklapaju, odnosno oni nisu međusobno isključivi. Lako je vidjeti da je događaj $C_1C_2C_3$ međusobno isključiv sa događajima $A_1 + A_2 + A_3$ i $B_1B_2 + B_1B_3 + B_2B_3$, ali ova dva događaja

između sebe nisu međusobno isključiva. Zaista, ako su recimo prva dva pogotka u krilo a treći u kabinu, desiće se oba ova događaja, jer se tada desio i događaj A_3 (što povlači i događaj $A_1 + A_2 + A_3$), kao i događaj B_1B_2 (što povlači događaj $B_1B_2 + B_1B_3 + B_2B_3$). Da ova dva događaja nisu međusobno isključivi, može se lako pokazati i formalnim putem:

$$\begin{aligned}
 & (A_1 + A_2 + A_3)(B_1B_2 + B_1B_3 + B_2B_3) = \\
 & = A_1B_1B_2 + A_1B_1B_3 + A_1B_2B_3 + A_2B_1B_2 + A_2B_1B_3 + A_2B_2B_3 + A_3B_1B_2 + A_3B_1B_3 + A_3B_2B_3 = \\
 & = A_1B_1B_2 + A_1B_1B_3 + A_1B_2B_3 + B_1A_2B_2 + A_2B_1B_3 + A_2B_2B_3 + A_3B_1B_2 + B_1A_3B_3 + B_2A_3B_3 = \\
 & = OB_2 + OB_3 + A_1B_2B_3 + B_1O + A_2B_1B_3 + OB_3 + A_3B_1B_2 + B_1O + B_2O = \\
 & = O + O + A_1B_2B_3 + O + A_2B_1B_3 + O + A_3B_1B_2 + O + O = A_1B_2B_3 + A_2B_1B_3 + A_3B_1B_2 \neq O
 \end{aligned}$$

Stoga će nam trebati i vjerovatnoća da se istovremeno dogode oba ova događaja:

$$\begin{aligned}
 & p((A_1 + A_2 + A_3)(B_1B_2 + B_1B_3 + B_2B_3)) = p(A_1B_2B_3 + A_2B_1B_3 + A_3B_1B_2) = \\
 & = p(A_1B_2B_3) + p(A_2B_1B_3) + p(A_3B_1B_2) = \\
 & = p(A_1)p(B_2)p(B_3) + p(A_2)p(B_1)p(B_3) + p(A_3)p(B_1)p(B_2) = 3 \cdot 0.05 \cdot 0.2^2 = 0.006
 \end{aligned}$$

Konačno, kako je obaranje aviona zbir događaja $A_1 + A_2 + A_3$, $B_1B_2 + B_1B_3 + B_2B_3$ i $C_1C_2C_3$, tražena vjerovatnoća iznosi

$$\begin{aligned}
 & p = p(A_1 + A_2 + A_3 + B_1B_2 + B_1B_3 + B_2B_3 + C_1C_2C_3) = \\
 & = p(A_1 + A_2 + A_3) + p(B_1B_2 + B_1B_3 + B_2B_3) - p((A_1 + A_2 + A_3)(B_1B_2 + B_1B_3 + B_2B_3)) + p(C_1C_2C_3) = \\
 & = 0.142625 + 0.104 - 0.006 + 0.421875 = 0.6625 = 66.25 \%
 \end{aligned}$$

Vidimo da smo došli do tačnog rezultata. Alternativno, do istog rezultata možemo doći i ukoliko obaranje aviona sa tri pogotka predstavimo kao zbir više međusobno isključivih događaja, tako da je vjerovatnoća obaranja prosto zbir njihovih vjerovatnoća. Postoji više načina kako se to može uraditi. Jedna mogućnost je da pored događaja $A_1 + A_2 + A_3$ (barem jedan pogodak u kabinu) i $C_1C_2C_3$ (sva tri pogotka u trup) posmatramo događaj $\bar{A}_1B_2B_3 + \bar{A}_2B_1B_3 + \bar{A}_3B_1B_2$ (dva pogotka su u krila, pri čemu preostali pogodak nije u kabinu). Lako se vidi da je ovaj događaj međusobno isključiv sa prethodna dva, kao i da on zajedno sa prethodna dva pokriva sve načine kako avion može biti oboren sa tri pogotka. Međutim, izračunati vjerovatnoću ovog događaja je malo mučno, jer je on sastavljen od komponenti koje nisu međusobno nespojive (zaista, mogu se istovremeno desiti recimo događaji $\bar{A}_1B_2B_3$ i $\bar{A}_2B_1B_3$, a to će se desiti ukoliko sva tri pogotka budu u krilo). Stoga, vjerovatnoću ovog događaja moramo računati ovako:

$$\begin{aligned}
 & p(\bar{A}_1B_2B_3 + \bar{A}_2B_1B_3 + \bar{A}_3B_1B_2) = \\
 & = p(\bar{A}_1B_2B_3 + \bar{A}_2B_1B_3) + p(\bar{A}_3B_1B_2) - p((\bar{A}_1B_2B_3 + \bar{A}_2B_1B_3)\bar{A}_3B_1B_2) = \\
 & = p(\bar{A}_1B_2B_3 + \bar{A}_2B_1B_3) + p(\bar{A}_3B_1B_2) - p(\bar{A}_1\bar{A}_3B_1B_2B_3 + \bar{A}_2\bar{A}_3B_1B_2B_3) = \\
 & = p(\bar{A}_1B_2B_3 + \bar{A}_2B_1B_3) + p(\bar{A}_3B_1B_2) - p(B_1B_2B_3 + B_1B_2B_3) = \\
 & = p(\bar{A}_1B_2B_3) + p(\bar{A}_2B_1B_3) - p(\bar{A}_1\bar{A}_2B_1B_2B_3) + p(\bar{A}_3B_1B_2) - p(B_1B_2B_3) = \\
 & = p(\bar{A}_1B_2B_3) + p(\bar{A}_2B_1B_3) - p(B_1B_2B_3) + p(\bar{A}_3B_1B_2) - p(B_1B_2B_3) = \\
 & = p(\bar{A}_1B_2B_3) + p(\bar{A}_2B_1B_3) + p(\bar{A}_3B_1B_2) - 2p(B_1B_2B_3) = \\
 & = p(\bar{A}_1)p(B_2)p(B_3) + p(\bar{A}_2)p(B_1)p(B_3) + p(\bar{A}_3)p(B_1)p(B_2) - 2p(B_1)p(B_2)p(B_3) = \\
 & = (1 - p(A_1))p(B_2)p(B_3) + (1 - p(A_2))p(B_2)p(B_3) + (1 - p(A_3))p(B_1)p(B_2) - 2p(B_1)p(B_2)p(B_3) = \\
 & = 3 \cdot (1 - 0.05) \cdot 0.2^2 - 2 \cdot 0.2^3 = 0.114 - 0.016 = 0.098
 \end{aligned}$$

Ovdje su iskorištena neka pravila algebre događaja za pojednostavljenje nekih događaja koji se javljaju u prethodnom računu. Naime, vrijedi $XY = X$ kad god je $X \subseteq Y$, tj. kad je događaj X sadržan u događaju Y , odnosno kada događaj X povlači događaj Y . Ovo je iskorišteno da

zaključimo da je, recimo, $\overline{A_1}\overline{A_2}B_1B_2B_3 = B_1B_2B_3$. Zaista, događaji B_1 i B_2 povlače respektivno događaja $\overline{A_1}$ i $\overline{A_2}$, odnosno događaji B_1 i B_2 sadržani su respektivno u događajima $\overline{A_1}$ i $\overline{A_2}$ (što je jasno i zbog činjenice da je očigledno $\overline{A_1} = B_1 + C_1$ i $\overline{A_2} = B_2 + C_2$). Ovo pojednostavljenje je bitno, jer ne treba zaboraviti da relacija $p(XY) = p(X)p(Y)$ vrijedi samo ukoliko su događaji X i Y nezavisni jedan od drugog.

Konačno sada nije teško izračunati i vjeratnoću obaranja aviona:

$$\begin{aligned} p &= p(A_1 + A_2 + A_3 + A_1B_2B_3 + A_2B_1B_3 + A_3B_1B_2 + C_1C_2C_3) = \\ &= p(A_1 + A_2 + A_3) + p(A_1B_2B_3 + A_2B_1B_3 + A_3B_1B_2) + p(C_1C_2C_3) = \\ &= 0.142625 + 0.098 + 0.421875 = 0.6625 = 66.25\% \end{aligned}$$

Kao što je i očekivano, ponovo se dobija isti rezultat.

Umjesto događaja $\overline{A_1}B_2B_3 + \overline{A_2}B_1B_3 + \overline{A_3}B_1B_2$ mogli smo razmatrati i njemu ekvivalentan događaj $B_1B_2C_3 + B_1B_3C_2 + B_2B_3C_1 + B_1B_2B_3$, što predstavlja događaj da su od tri pogotka dva u krilo a treći u trup, ili da su sva tri pogotka u krilo. Ekvivalencija ova dva događaja je intuitivno prilično očita, a lako se može i formalno pokazati ako uočimo da je $\overline{A_i} = B_i + C_i$ za $i = 1 \dots 3$:

$$\begin{aligned} \overline{A_1}B_2B_3 + \overline{A_2}B_1B_3 + \overline{A_3}B_1B_2 &= (B_1 + C_1)B_2B_3 + (B_2 + C_2)B_1B_3 + (B_3 + C_3)B_1B_2 = \\ &= B_1B_2B_3 + B_2B_3C_1 + B_1B_2B_3 + B_1B_3C_2 + B_1B_2B_3 + B_1B_2C_3 = \\ &= B_1B_2C_3 + B_1B_3C_2 + B_2B_3C_1 + B_1B_2B_3 \end{aligned}$$

Prednost razmatranja događaja $B_1B_2C_3 + B_1B_3C_2 + B_2B_3C_1 + B_1B_2B_3$ umjesto njemu ekvivalentnog događaja $\overline{A_1}B_2B_3 + \overline{A_2}B_1B_3 + \overline{A_3}B_1B_2$ je u tome što su komponente od kojih se on sastoji međusobno nespojive (što je posve lako uočiti), tako da je

$$\begin{aligned} p(B_1B_2C_3 + B_1B_3C_2 + B_2B_3C_1 + B_1B_2B_3) &= \\ &= p(B_1B_2C_3) + p(B_1B_3C_2) + p(B_2B_3C_1) + p(B_1B_2B_3) = \\ &= p(B_1)p(B_2)p(C_3) + p(B_1)p(B_3)p(C_2) + p(B_2)p(B_3)p(C_1) + p(B_1)p(B_2)p(B_3) = \\ &= 3 \cdot 0.2^2 \cdot 0.75 + 0.2^3 = 0.09 + 0.008 = 0.098 \end{aligned}$$

Stoga, za vjerovatnoću obaranja aviona imamo:

$$\begin{aligned} p &= p(A_1 + A_2 + A_3 + B_1B_2C_3 + B_1B_3C_2 + B_2B_3C_1 + B_1B_2B_3 + C_1C_2C_3) = \\ &= p(A_1 + A_2 + A_3) + p(B_1B_2C_3 + B_1B_3C_2 + B_2B_3C_1 + B_1B_2B_3) + p(C_1C_2C_3) = \\ &= 0.142625 + 0.098 + 0.421875 = 0.6625 = 66.25\% \end{aligned}$$

Ovim smo traženi rezultat izveli na još jedan način.

Konačno, do rezultata možemo doći i posmatrajući sve moguće kombinacije tri pogotka, odnosno događaje oblika $X_1Y_2Z_3$ gdje X, Y i Z mogu biti A, B ili C i sabiranjem vjerovatnoća onih kombinacija koje dovode do pada aviona (prosto sabiranje je moguće jer su sve takve kombinacije međusobno isključive). Nezgodno je što od $3^3 = 27$ takvih kombinacija čak 24 kombinacije dovode do pada aviona (jedino kombinacije $B_1C_2C_3$, $C_1B_2C_3$ i $C_1C_2B_3$ ne dovode do pada aviona). To su sljedeće kombinacije:

$$\begin{aligned} &A_1A_2A_3, A_1A_2B_3, A_1A_2C_3, A_1B_2A_3, A_1B_2B_3, A_1B_2C_3, A_1C_2A_3, A_1C_2B_3, \\ &A_1C_2C_3, B_1A_2A_3, B_1A_2B_3, B_1A_2C_3, B_1B_2A_3, B_1B_2B_3, B_1B_2C_3, B_1C_2A_3, \\ &B_1C_2B_3, C_1A_2A_3, C_1A_2B_3, C_1A_2C_3, C_1B_2A_3, C_1B_2B_3, C_1C_2A_3, C_1C_2C_3 \end{aligned}$$

Vjerovatnoće ovih kombinacija redom iznose:

$$\begin{aligned}
p(A_1A_2A_3) &= p(A_1) p(A_2) p(A_3) = 0.05^3 = 0.000125 \\
p(A_1A_2B_3) &= p(A_1B_2A_3) = p(B_1A_2A_3) = p(A_1) p(A_2) p(B_3) = 0.05^2 \cdot 0.2 = 0.0005 \\
p(A_1A_2C_3) &= p(A_1C_2A_3) = p(C_1A_2A_3) = p(A_1) p(A_2) p(C_3) = 0.05^2 \cdot 0.75 = 0.001875 \\
p(A_1B_2B_3) &= p(B_1A_2B_3) = p(B_1B_2A_3) = p(A_1) p(B_2) p(B_3) = 0.05 \cdot 0.2^2 = 0.002 \\
p(A_1B_2C_3) &= p(A_1C_2B_3) = p(B_1A_2C_3) = p(B_1C_2A_3) = p(C_1A_2B_3) = p(C_1B_2A_3) = \\
&= p(A_1) p(B_2) p(B_3) = 0.05 \cdot 0.2 \cdot 0.75 = 0.0075 \\
p(A_1C_2C_3) &= p(C_1A_2C_3) = p(C_1C_2A_3) = p(A_1) p(C_2) p(C_3) = 0.05 \cdot 0.75^2 = 0.028125 \\
p(B_1B_2B_3) &= p(B_1) p(B_2) p(B_3) = 0.2^3 = 0.008 \\
p(B_1B_2C_3) &= p(B_1C_2B_3) = p(C_1B_2B_3) = p(B_1) p(B_2) p(C_3) = 0.2^2 \cdot 0.75 = 0.03 \\
p(C_1C_2C_3) &= p(C_1) p(C_2) p(C_3) = 0.75^3 = 0.421875
\end{aligned}$$

Odavde slijedi da je vjerovatnoća obaranja aviona:

$$\begin{aligned}
p &= 0.000125 + 3 \cdot 0.0005 + 3 \cdot 0.001875 + 3 \cdot 0.002 + 6 \cdot 0.0075 + \\
&\quad + 3 \cdot 0.028125 + 0.008 + 3 \cdot 0.03 + 0.421875 = \\
&= 0.000125 + 0.0015 + 0.005625 + 0.006 + 0.045 + 0.084375 + 0.008 + 0.09 + 0.421875 = \\
&= 0.6625 = 66.25 \%
\end{aligned}$$

Od svih direktnih načina da se izvede traženi rezultat, ovaj je najelementarniji s obzirom da raščlanjuje razmatrani događaj na posve jednostavne događaje, ali je istovremeno i najzamorniji.

Ovim smo pokazali da postoji mnogo ispravnih načina da se izvede traženi rezultat, ali također i mnogo mogućnosti da se napravi greška (na neke od njih smo ukazali). Međutim, svi direktni načini izvođenja neuporedivo su složeniji od indirektnog načina koji smo prvi upotrijebili. Ovaj primjer jasno ilustrira da je potrebno dobro promisliti prije nego što se odabere pristup kojim će se rješavati postavljeni problem.