

- a) Za slučaj kada je poredak sabiraka nebitan, radi se o particijama broja. Stoga je rješenje problema dato kao  $p(10)$ , gdje je  $p(n)$  broj particija broja  $n$ . Stoga je potrebno izračunati ovu vrijednost. Međutim, računanje  $p(n)$  nije sasvim lako, zbog nepostojanja eksplicitne formule za njegovo računanje. Najprihvatljiviji način za računanje  $p(n)$  za ne prevelike vrijednosti  $n$  dat je preko Eulerove petougaone rekurzivne formule:

$$p(n) = \sum_{k \neq 0} (-1)^{k+1} p\left(n - \frac{1}{2}k(3k+1)\right), \quad p(0) = 1, \quad p(n) = 0 \text{ za } n < 0.$$

Zbog uvjeta  $p(n) = 0$  za  $n < 0$ , suma u gornjoj formuli je uvijek konačna. Tako imamo:

$$\begin{aligned} p(1) &= p(0) = 1 \\ p(2) &= p(0) + p(1) = 1 + 1 = 2 \\ p(3) &= p(1) + p(2) = 1 + 2 = 3 \\ p(4) &= p(2) + p(3) = 2 + 3 = 5 \\ p(5) &= -p(0) + p(3) + p(4) = -1 + 3 + 5 = 7 \\ p(6) &= -p(1) + p(4) + p(5) = -1 + 5 + 7 = 11 \\ p(7) &= -p(0) - p(2) + p(5) + p(6) = -1 - 2 + 7 + 11 = 15 \\ p(8) &= -p(1) - p(3) + p(6) + p(7) = -1 - 3 + 11 + 15 = 22 \\ p(9) &= -p(2) - p(4) + p(7) + p(8) = -2 - 5 + 15 + 22 = 30 \\ p(10) &= -p(3) - p(5) + p(8) + p(9) = -3 - 7 + 22 + 30 = 42 \end{aligned}$$

Dakle, traženi broj rastava je  $p(10) = 42$ .

Čisto radi ilustracije da je Eulerova petougaona formula najbolji način za računanje  $p(n)$  za umjereno velike vrijednosti  $n$ , razmotrimo i kakve su alternativne mogućnosti. Ukoliko se broj particija broja  $n$  sa najviše  $k$  sabiraka označi sa  $q(n, k)$ , nije preteško izvesti da za  $q(n, k)$  vrijedi sljedeća rekurzivna formula:

$$q(n, k) = q(n, k-1) + q(n-k, k), \quad q(n, 1) = 1, \quad q(0, k) = 1, \quad q(n, k) = q(n, n) \text{ za } k > n$$

Kako očigledno vrijedi  $p(n) = q(n, n)$ ,  $p(10)$  možemo izračunati tako što ćemo izračunati  $q(10, 10)$ , a ovu vrijednost možemo izračunati tako što ćemo postepeno računati vrijednosti  $q(i, j)$  za vrijednosti  $i$  i  $j$  od 0 do 10 postupno od manjih vrijednosti ka većim, jer na taj način za računanje novih vrijednosti možemo iskoristiti vrijednosti koje su već računate. Detaljnija analiza pokazuje da za računanje  $q(n, k)$  nije neophodno izračunati vrijednosti  $q(i, j)$  za baš sve vrijednosti  $i$  i  $j$  od 0 do  $n$ , nego je dovoljno izračunati samo vrijednosti  $q(i, j)$  za  $2 \leq i \leq n-2$ ,  $2 \leq j \leq i$  i  $2 \leq j \leq n-i$  kao i vrijednosti  $q(n, j)$  za  $2 \leq j \leq n$ , pri čemu vrijednosti oblika  $q(i, 1)$  i  $q(0, j)$  već znamo (one su jednake jedinici). Tako imamo sljedeći račun:

$$\begin{aligned} q(2, 2) &= q(2, 1) + q(0, 2) = 1 + 1 = 2 \\ q(3, 2) &= q(3, 1) + q(1, 2) = 1 + q(1, 1) = 1 + 1 = 2 \\ q(3, 3) &= q(3, 2) + q(0, 3) = 2 + q(0, 0) = 2 + 1 = 3 \\ q(4, 2) &= q(4, 1) + q(2, 2) = 1 + 2 = 3 \\ q(4, 3) &= q(4, 2) + q(1, 3) = 3 + q(1, 1) = 3 + 1 = 4 \\ q(4, 4) &= q(4, 3) + q(0, 4) = 4 + q(0, 0) = 4 + 1 = 5 \\ q(5, 2) &= q(5, 1) + q(3, 2) = 1 + 2 = 3 \\ q(5, 3) &= q(5, 2) + q(2, 3) = 3 + q(2, 2) = 3 + 2 = 5 \\ q(5, 4) &= q(5, 3) + q(1, 4) = 5 + q(1, 1) = 5 + 1 = 6 \\ q(5, 5) &= q(5, 4) + q(0, 5) = 6 + q(0, 0) = 6 + 1 = 7 \\ q(6, 2) &= q(6, 1) + q(4, 2) = 1 + 3 = 4 \\ q(6, 3) &= q(6, 2) + q(3, 3) = 4 + 3 = 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q(6, 4) &= q(6, 3) + q(2, 4) = 7 + q(2, 2) = 7 + 2 = 9 \\
q(7, 2) &= q(7, 1) + q(5, 2) = 1 + 3 = 4 \\
q(7, 3) &= q(7, 2) + q(4, 3) = 4 + 4 = 8 \\
q(8, 2) &= q(8, 1) + q(6, 2) = 1 + 4 = 5 \\
q(10, 2) &= q(10, 1) + q(8, 2) = 1 + 5 = 6 \\
q(10, 3) &= q(10, 2) + q(7, 3) = 6 + 8 = 14 \\
q(10, 4) &= q(10, 3) + q(6, 4) = 14 + 9 = 23 \\
q(10, 5) &= q(10, 4) + q(5, 5) = 23 + 7 = 30 \\
q(10, 6) &= q(10, 5) + q(4, 6) = 30 + q(4, 4) = 30 + 5 = 35 \\
q(10, 7) &= q(10, 6) + q(3, 7) = 35 + q(3, 3) = 35 + 3 = 38 \\
q(10, 8) &= q(10, 7) + q(2, 8) = 38 + q(2, 2) = 38 + 2 = 40 \\
q(10, 9) &= q(10, 8) + q(1, 9) = 40 + q(1, 1) = 40 + 1 = 41 \\
q(10, 10) &= q(10, 9) + q(0, 10) = 41 + 1 = 42
\end{aligned}$$

Obavljeni račun se može preglednije predstaviti tabelarno, kao recimo u sljedećoj tabeli:

$q(n, k)$		$k$									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n$	1	1									
	2	1	2								
	3	1	2	3							
	4	1	3	4	5						
	5	1	3	5	6	7					
	6	1	4	7	9						
	7	1	4	8							
	8	1	5								
	9	1									
	10	1	6	14	23	30	35	38	40	41	42

U svakom slučaju, i na ovaj način se dobija da je  $p(10) = q(10, 10) = 42$ . Međutim, vidimo da je bio potreban duži račun da se izvede ovaj rezultat u odnosu na primjenu Eulerove petougane formule. Nije teško zaključiti da na ovaj način količina računa kao i količina međurezultata koje je potrebno pamtiti raste približno proporcionalno sa  $n^2$  kada  $n$  raste. S druge strane, za primjenu Eulerove petougane formule količina međurezultata koje je potrebno pamtiti proporcionalna je sa  $n$  (jer je potrebno pamtiti samo prethodno izračunate vrijednosti  $p(i)$  za  $i$  od  $n-1$ ), dok se može pokazati da količina računa kojeg treba obaviti sa porastom  $n$  raste približno proporcionalno sa  $n^{3/2}$ , što je znatno povoljnije od  $n^2$ .

Još jedan način za računanje  $p(n)$  je rekurzivna formula

$$p(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \sigma(n-i) p(i)$$

Za primjenu ove formule treba prethodno izračunati vrijednosti  $\sigma(i)$  za sve vrijednosti  $i$  od 1 do  $n$ . Kada su vrijednosti  $i$  male,  $\sigma(i)$  je najlakše računati po definiciji, kao zbir svih djelilaca broja  $i$  (za veće vrijednosti  $i$ , bolje je koristiti formulu koja se zasniva na rastavi broja  $i$  na proste faktore). Recimo, imamo  $\sigma(10) = 1 + 2 + 5 + 10 = 18$ . Tako dobijamo:

$$\begin{array}{ccccc}
\sigma(1) = 1 & \sigma(2) = 3 & \sigma(3) = 4 & \sigma(4) = 7 & \sigma(5) = 6 \\
\sigma(6) = 12 & \sigma(7) = 8 & \sigma(8) = 15 & \sigma(9) = 13 & \sigma(10) = 18
\end{array}$$

Sada možemo preći na postupno računanje vrijednosti  $p(i)$  od polazeći od manjih vrijednosti  $i$  ka većim, sve dok ne izračunamo  $p(10)$ :

$$\begin{aligned}
p(1) &= \frac{1}{1} \sigma(1) p(0) = \frac{1}{1} \cdot 1 \cdot 1 = 1 \\
p(2) &= \frac{1}{2} (\sigma(2) p(0) + \sigma(1) p(1)) = \frac{1}{2} (3 \cdot 1 + 1 \cdot 1) = 2 \\
p(3) &= \frac{1}{3} (\sigma(3) p(0) + \sigma(2) p(1) + \sigma(1) p(2)) = \frac{1}{3} (4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2) = 3 \\
p(4) &= \frac{1}{4} (\sigma(4) p(0) + \sigma(3) p(1) + \sigma(2) p(2) + \sigma(1) p(3)) = \frac{1}{4} (7 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3) = 5 \\
p(5) &= \frac{1}{5} (\sigma(5) p(0) + \sigma(4) p(1) + \sigma(3) p(2) + \sigma(2) p(3) + \sigma(1) p(4)) = \\
&= \frac{1}{5} (6 \cdot 1 + 7 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 5) = 7 \\
p(6) &= \frac{1}{6} (\sigma(6) p(0) + \sigma(5) p(1) + \sigma(4) p(2) + \sigma(3) p(3) + \sigma(2) p(4) + \sigma(1) p(5)) = \\
&= \frac{1}{6} (12 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 7) = 11 \\
p(7) &= \frac{1}{7} (\sigma(7) p(0) + \sigma(6) p(1) + \sigma(5) p(2) + \sigma(4) p(3) + \sigma(3) p(4) + \sigma(2) p(5) + \sigma(1) p(6)) = \\
&= \frac{1}{7} (8 \cdot 1 + 12 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + 1 \cdot 11) = 15 \\
p(8) &= \frac{1}{8} (\sigma(8) p(0) + \sigma(7) p(1) + \sigma(6) p(2) + \sigma(5) p(3) + \sigma(4) p(4) + \sigma(3) p(5) + \sigma(2) p(6) + \\
&\quad + \sigma(1) p(7)) = \frac{1}{8} (15 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 12 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 5 + 4 \cdot 7 + 3 \cdot 11 + 1 \cdot 15) = 22 \\
p(9) &= \frac{1}{9} (\sigma(9) p(0) + \sigma(8) p(1) + \sigma(7) p(2) + \sigma(6) p(3) + \sigma(5) p(4) + \sigma(4) p(5) + \sigma(3) p(6) + \\
&\quad + \sigma(2) p(7) + \sigma(1) p(8)) = \frac{1}{9} (13 \cdot 1 + 15 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 12 \cdot 3 + 6 \cdot 5 + 7 \cdot 7 + 4 \cdot 11 + 3 \cdot 15 + 1 \cdot 22) = 30 \\
p(10) &= \frac{1}{10} (\sigma(10) p(0) + \sigma(9) p(1) + \sigma(8) p(2) + \sigma(7) p(3) + \sigma(6) p(4) + \\
&\quad + \sigma(5) p(5) + \sigma(4) p(6) + \sigma(3) p(7) + \sigma(2) p(8) + \sigma(1) p(9)) = \\
&= \frac{1}{10} (18 \cdot 1 + 13 \cdot 1 + 15 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 12 \cdot 5 + 6 \cdot 7 + 7 \cdot 11 + 4 \cdot 15 + 3 \cdot 22 + 1 \cdot 30) = 42
\end{aligned}$$

Vidimo da smo ponovo dobili  $p(10) = 42$ . Na ovaj način količina podataka koje treba pamtiti ista je kao kod Eulerove petougaone formule, ali je količina računa znatno veća. Nije teško pokazati da broj računskih operacija neophodan da se izračuna  $p(n)$  na ovaj način raste također približno proporcionalno sa  $n^2$  kada  $n$  raste.

Demonstrirajmo još i Hardy-Ramanujan-Rademacherovu formulu

$$p(n) = \frac{4\sqrt{3}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{\pi \operatorname{ch} \frac{\pi\sqrt{24n-1}}{6k}}{(24n-1)\sqrt{k}} - \frac{6\sqrt{k} \operatorname{sh} \frac{\pi\sqrt{24n-1}}{6k}}{(24n-1)^{3/2}} \right) \sum_{h=1}^k \cos \pi \left[ \sum_{j=1}^{k-1} \frac{j}{k} \left( \frac{hj}{k} - \left\lfloor \frac{hj}{k} \right\rfloor - \frac{1}{2} \right) - \frac{2hn}{k} \right] \right]$$

NZD(h, k) = 1

Bez obzira na složenost, ova formula je najbrži način za računanje  $p(n)$  za veće vrijednosti  $n$ , s obzirom da red u ovoj formuli konvergira veoma brzo. Recimo, za  $n = 10$  prvi član reda iznosi

$$\frac{4\sqrt{3}}{239\pi} \left( \pi \operatorname{ch} \frac{\pi\sqrt{239}}{6} - \frac{6}{\sqrt{239}} \operatorname{sh} \frac{\pi\sqrt{239}}{6} \right) \approx 41.6278$$

Dakle, za  $n = 10$  već prvi član reda zaokružen na najbliži cijeli broj daje tačnu vrijednost za  $p(n)$ .

- b) Za slučaj kada je poredak sabiraka bitan, tu se radi o kompozicijama broja. Ovaj slučaj je neuporedivo jednostavniji, s obzirom da je poznato da broj  $n$  ima  $2^{n-1}$  kompozicija. Kako je u našem slučaju  $n = 10$ , traženi broj rastava je  $2^9 = 512$ .