

Klasični način za rješavanje ovog zadatka je razmatranjem različitih situacija koje mogu nastupiti. U konkretnom problemu očigledno mogu nastupiti sljedeći slučajevi:

- Paket sadrži sve četiri različite voćke;
- Paket sadrži dvije iste voćke i još po dvije različite voćke;
- Paket sadrži dva puta po dvije iste voćke;
- Paket sadrži tri iste voćke i četvrtu različitu od njih;
- Paket sadrži četiri iste voćke.

U prvom slučaju, kako imamo 5 različitih vrsta voćki, četiri različite voćke možemo odabrati na $C(5, 4) = (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2) / (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 24) = 5$ načina. Zaista, radi se o broju načina na koji iz petočlanog skupa koji dobijamo tako da uzmemo po jednu voćku svake vrste možemo izdvojiti četveročlani podskup. To je ujedno i broj različitih paketa koji mogu nastati u ovom slučaju. Primijetimo da su u pitanju kombinacije a ne varijacije, s obzirom da poredak voćki u paketu ne igra nikakvu ulogu.

U drugom slučaju, voćka koja se ponavlja ne može biti naranča, jer imamo samo jednu naranču. Preostaje nam izbor iz skupa {jabuka, kruška, banana, breskva}, što se može izvesti na 4 načina. Nakon što smo odabrali vrstu voćke od koje ćemo uzeti dva komada, od preostale četiri vrste voćki treba izabrati dvije (nakon čega ćemo od svake vrste uzeti po jedan komad), što se može izvesti na $C(4, 2) = (4 \cdot 3) / (1 \cdot 2) = 6$ načina. Na osnovu multiplikativnog principa, slijedi da ovaj slučaj daje ukupno $4 \cdot 6 = 24$ različitih paketa.

U trećem slučaju, dvije vrste voćki (za dva para) također možemo odabrati jedino iz skupa {jabuka, kruška, banana, breskva} s obzirom da ima samo jedna naranča. Ovaj izbor, kao i u prethodnom slučaju, možemo izvesti na $C(4, 2) = 6$ načina. Nakon toga ćemo od svake vrste uzeti po dva komada (što naravno možemo uraditi samo na jedan način, jer ne pravimo razliku između različitih primjeraka iste vrste voćke). Dakle, ovaj slučaj daje ukupno 6 različitih paketa.

U četvrtom slučaju, vrstu voćke od koje ćemo uzeti tri primjerka možemo izabrati jedino iz skupa {jabuka, kruška}, jer jedino jabuka i kruška ima dovoljno na raspolaganju. Dakle, taj izbor možemo izvršiti na 2 načina. Kada uzmemo tri primjerka odabrane vrste voćke, četvrtu preostalu voćku možemo odabrati na 4 načina, jer su preostale 4 vrste voćki. Na osnovu multiplikativnog principa, slijedi da ovaj slučaj daje ukupno $2 \cdot 4 = 8$ različitih paketa.

Peti slučaj daje samo jednu moguću situaciju, jer samo jabuka ima dovoljno da možemo napraviti paket sa četiri iste voćke.

Konačno, na osnovu aditivnog principa, ukupan broj različitih situacija iznosi

$$5 + 24 + 6 + 8 + 1 = 44$$

Do istog rezultata može se doći i formalnim (mehaničkim) putem. Tražene situacije se mogu predstaviti kao kombinacije sa ponavljanjem klase 4 skupa {jabuka, kruška, banana, breskva, naranča} uz dopunsko ograničenje da se jabuka smije pojaviti najviše 5 puta, kruška najviše 3 puta, banana i breskva najviše 2 puta, dok se naranče ne smiju ponavljati. Odnosno, u pitanju su 4-kombinacije multiskupa $\{5 \cdot \text{jabuka}, 3 \cdot \text{kruška}, 2 \cdot \text{banana}, 2 \cdot \text{breskva}, 1 \cdot \text{naranča}\}$, tako da je broj traženih paketa $\overline{C}(5, 4; 5, 3, 2, 2, 1)$. Za k -kombinacije multiskupa $\{m_1 \cdot a_1, m_2 \cdot a_2, \dots, m_n \cdot a_n\}$ pokazuje se da njihov broj $\overline{C}(n, k; m_1, m_2, \dots, m_n)$ iznosi

$$\overline{C}(n, k; m_1, m_2, \dots, m_n) = \sum_{\substack{\lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2 + \dots + \lambda_s i_s = k \\ M \geq i_1 > i_2 > \dots > i_s \geq 1}} \binom{c(i_1)}{\lambda_1} \binom{c(i_2) - \lambda_1}{\lambda_2} \dots \binom{c(i_s) - \lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_{s-1}}{\lambda_s}$$

gdje je $M = \max\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$, $c(i)$ je broj brojeva m_p , $p = 1 \dots n$ koji su veći ili jednaki od i , dok se sumiranje vrši po svim rastavama broja k koje se mogu prikazati u obliku $k = \lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2 + \dots + \lambda_s i_s$ gdje su λ_p, i_p , $p = 1 \dots n$ prirodni brojevi i $M \geq i_1 > i_2 > \dots > i_s \geq 1$.

U ovom konkretnom problemu koji rješavamo imamo $n = 5$, $k = 4$, $m_1 = 5$, $m_2 = 3$, $m_3 = 2$, $m_4 = 2$, $m_5 = 1$, $M = \max\{5, 3, 2, 2, 1\} = 5$, $c(1) = 5$, $c(2) = 4$, $c(3) = 2$ i $c(4) = 1$, dok sve rastave broja $k = 4$ traženog oblika glase $4 = 1 \cdot 4$, $4 = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1$, $4 = 2 \cdot 2$, $4 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1$ i $4 = 4 \cdot 1$, tako da imamo:

$$\begin{aligned} \overline{C}(5, 4; 5, 3, 2, 2, 1) &= \\ &= \binom{c(4)}{1} + \binom{c(3)}{1} \binom{c(1)-1}{1} + \binom{c(2)}{2} + \binom{c(2)}{1} \binom{c(1)-1}{2} + \binom{c(1)}{4} = \\ &= \binom{1}{1} + \binom{2}{1} \binom{5-1}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{1} \binom{5-1}{2} + \binom{5}{4} = \frac{1}{1} + \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{1} + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} + \frac{4}{1} \cdot \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \\ &= 1 + 2 \cdot 4 + 6 + 4 \cdot 6 + 5 = 1 + 8 + 6 + 24 + 5 = 44 \end{aligned}$$

Vidimo da smo do istog rezultata došli potpuno mehaničkim putem.

Postoje i drugi načini da se mehaničkim putem dođe do istog rezultata. Recimo, jedan od njih je i MacMahonova formula

$$\overline{C}(n, k; m_1, m_2, \dots, m_n) = \sum_{p=0}^n (-1)^p \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} \binom{n+k-m_{i_1}-m_{i_2}-\dots-m_{i_p}-p-1}{k-m_{i_1}-m_{i_2}-\dots-m_{i_p}-p}$$

Mada je dobra stvar McMahanove formule to što ona ne traži nikakve pripremljene radnje nego se samo vrši uvrštavanje poznatih vrijednosti u formulu, ona je tipično praktična samo za sasvim male vrijednosti n (recimo za $n = 3$), jer kada se potpuno raspišu, sume u ovoj formuli daju ukupno 2^n članova. Ipak, uz malo domišljatosti, ova formula može biti upotrebljiva i za znatno veće vrijednosti n u nekim drugim okolnostima, recimo kada je k malo ili kada su vrijednosti m_i velike. Naime, u tom slučaju veliki broj članova u tako raspisanim sumama biće jednak nuli i moguće je unaprijed predvidjeti koji su to članovi, tako da se ne moraju ni razmatrati. Da bismo ovo uvidjeli, raspišimo eksplicitno spoljašnju sumu u izrazu za $\overline{C}(5, 4; 5, 3, 2, 2, 1)$ prema ovoj formuli:

$$\begin{aligned} \overline{C}(5, 4; 5, 3, 2, 2, 1) &= \binom{8}{4} - \sum_{1 \leq i \leq 5} \binom{7-m_i}{3-m_i} + \sum_{1 \leq i < j \leq 5} \binom{6-m_i-m_j}{2-m_i-m_j} - \sum_{1 \leq i < j < k \leq 5} \binom{5-m_i-m_j-m_k}{1-m_i-m_j-m_k} + \\ &+ \sum_{1 \leq i < j < k < l \leq 5} \binom{4-m_i-m_j-m_k-m_l}{0-m_i-m_j-m_k-m_l} - \sum_{1 \leq i < j < k < l < p \leq 5} \binom{3-m_i-m_j-m_k-m_l-m_p}{-1-m_i-m_j-m_k-m_l-m_p} \end{aligned}$$

Ako bismo sada bukvalno raspisali sve ove sume, dobili bismo ukupno 32 člana. Pogledajmo međutim drugu sumu. Poznato je da su binomni koeficijenti jednaki nuli kadgod je njihov donji indeks manji od nule. Ako pogledamo donji indeks $2 - m_i - m_j$ u binomnom koeficijentu, može se primijetiti da je on uvijek manji od nule, s obzirom da je $m_i + m_j > 2$ za sve vrijednosti i i j . Stoga je čitava druga suma jednaka nuli. Na isti način zaključujemo da su i treća, četvrta i peta suma također jednake nuli, tako da u igri ostaje samo prva suma. Stoga je:

$$\begin{aligned} \overline{C}(5, 4; 5, 3, 2, 2, 1) &= \binom{8}{4} - \sum_{1 \leq i \leq 5} \binom{7-m_i}{3-m_i} = \\ &= \binom{8}{4} - \left[\binom{7-5}{3-5} + \binom{7-3}{3-3} + \binom{7-2}{3-2} + \binom{7-2}{3-2} + \binom{7-1}{3-1} \right] = \\ &= \binom{8}{4} - \left[\binom{2}{-2} + \binom{4}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{1} + \binom{6}{2} \right] = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - (0 + 1 + \frac{5}{1} + \frac{5}{1} + \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2}) = \\ &= 7 \cdot 2 \cdot 5 - (0 + 1 + 5 + 5 + 3 \cdot 5) = 70 - 26 = 44 \end{aligned}$$

Vidimo da u ovom primjeru MacMahonova formula brzo i jednostavno dovodi do rješenja, ali samo pod uvjetom da se u startu odbace članovi za koje se zna da će biti jednaki nuli (što ne bi bio slučaj da je MacMahonova formula naivno primijenjena).

Interesantno je riješiti problem i pomoću funkcija izvodnica. $\overline{C}(n, k; m_1, m_2, \dots, m_n)$ se može se dobiti kao koeficijent uz t^k u polinomu

$$\varphi(n; m_1, m_2, \dots, m_n; t) = \prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} t^j$$

Za konkretan slučaj $\overline{C}(5, 4; 5, 3, 2, 2, 1)$ imamo:

$$\begin{aligned} \varphi(5; 5, 3, 2, 2, 1; t) &= (1+t+t^2+t^3+t^4+t^5)(1+t+t^2+t^3)(1+t+t^2)^2(1+t) = \\ &= (1+t+t^2+t^3+t^4+\dots)(1+t+t^2+t^3)(1+2t+3t^2+2t^3+t^4)(1+t) = \\ &= (1+2t+3t^2+4t^3+4t^4+\dots)(1+3t+5t^2+5t^3+3t^4+\dots) = \\ &= 1+5t+14t^2+28t^3+44t^4+\dots \end{aligned}$$

Ovdje su sa tri tačkice označeni članovi višeg reda od $k=4$, koje svakako ne treba računati ni u međurezultatima, s obzirom da ne utiču na konačni rezultat. Odavde se jasno vidi da je traženi rezultat 44, jer je to koeficijent uz t^4 u ovom polinomu.

Vidimo da smo ponovo dobili isti rezultat. Primjena funkcija izvodnica nije uvijek naročito praktična za ručni rad, jer treba obaviti dosta računanja (mada je količina računanja manja nego u slučaju traženja broja permutacija u multiskupovima). Bez obzira na to, korištenje funkcija izvodnica pri rješavanju ovog tipa problema traži najmanje razmišljanja (tj. postupak je posve formaliziran i šabloniziran), te je ovaj način rješavanja pogodan za implementaciju na računaru.