

Ovaj problem ćemo riješiti što ćemo prvo odrediti broj načina na koji je moguće rasporediti 25 kuglica koje se ne mogu međusobno razlikovati u 8 različitih kutija bez ikakvih ograničenja na broj kuglica u kutijama, a zatim ćemo od nađenog broja oduzeti broj načina kod kojih vrijedi da niti jedna kutija nije prazna. Tako ćemo odrediti broj načina kod kojih je barem jedna kutija prazna.

Nađimo prvo broj načina na koji je moguće rasporediti 25 kuglica koje se ne mogu međusobno razlikovati u 8 različitih kutija bez ikakvih ograničenja na broj kuglica u kutijama. Jedan od pristupa je korištenje metoda zvjezdica i štapića. Svaki razmještaj kuglica po kutijama možemo kodirati stringom tako što će svaka zvjezdica predstavljati jednu kuglicu, a između zvjezdica ćemo umetnuti štapiće koje označavaju "barijere" između kutija. Na taj način, grupe uzastopnih zvjezdica predstavljaju kuglice u pojedinim kutijama. Na primjer, razmještaj u kojem u prvoj kutiji imaju tri kuglice, u drugoj jedna, u trećoj nijedna, u četvrtoj pet kuglica itd. kodiramo kao string "\*\*\*|\*||\*\*\*\*\*|...". Na ovaj način, svaki razmještaj 25 kuglica u 8 kutija obostrano jednoznačno se kodira stringom koji ima 25 zvjezdica i  $8 - 1 = 7$  štapića, tj. ukupno 32 simbola. Broj ovakvih stringova možemo na više međusobno ekvivalentnih načina izraziti kao  $C(32, 7)$  ili kao  $C(32, 25)$  ili kao  $\bar{P}(32; 25, 7)$ . Prva varijanta je naklakša za računanje:

$$\begin{aligned} C(32, 7) &= \frac{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{32}{2} \cdot 31 \cdot \frac{30}{5 \cdot 6} \cdot 29 \cdot \frac{28}{4 \cdot 7} \cdot \frac{27}{3} \cdot 26 = \\ &= 16 \cdot 31 \cdot 1 \cdot 29 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 26 = 3365856 \end{aligned}$$

Ovo je ujedno i broj traženih razmještaja. Alternativno, Ovaj problem može se posmatrati i kao problem nalaženja broja kombinacija sa ponavljanjem. Zaista, označimo li zadanih 8 kutija sa  $x_1, x_2, \dots, x_8$ , svaku raspodjelu 25 kuglica u te kutije možemo predstaviti kao jednu kombinaciju sa ponavljanjem klase 25 skupa  $\{x_1, x_2, \dots, x_8\}$  u kojoj broj ponavljanja elementa  $x_i$  odgovara broju kuglica koje se nalaze u kutiji  $x_i$ , tj. u  $i$ -toj kutiji. Slijedi da je broj traženih razmještaja  $\bar{C}(25, 8) = C(25 + 8 - 1, 25) = C(32, 25)$ , što je još jedna potvrda izvedenog rezultata.

Nađimo sada broj načina na koji je moguće rasporediti 25 kuglica koje se ne mogu međusobno razlikovati u 8 različitih kutija, ali uz dopunsko ograničenje da niti jedna kutija ne smije biti prazna. Ponovo možemo koristiti metod zvjezdica i štapića, ali ovaj put će svaka grupa uzastopnih zvjezdica sadržavati jednu zvjezdicu manje nego što je broj kuglica u kutiji (kuglicu koja mora biti u kutiji ne kodiramo). Ovo je neophodno da bismo imali obostrano jednoznačno kodiranje (u suprotnom, svaki string koji sadrži dva uzastopna štapića ne bi kodirao niti jedan dozvoljeni razmještaj). Takvi stringovi će imati također 7 štapića, ali  $25 - 8 = 17$  zvjezdica. Ukupan broj simbola je 24, tako da broj takvih stringova  $C(24, 7)$ ,  $C(24, 17)$  ili  $\bar{P}(24; 17, 7)$ :

$$\begin{aligned} C(24, 7) &= \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{24}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 23 \cdot 22 \cdot \frac{21}{7} \cdot \frac{20}{5} \cdot 19 \cdot \frac{18}{6} = \\ &= 1 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 19 \cdot 3 = 346104 \end{aligned}$$

Ovo je ujedno i broj traženih razmještaja. Alternativno, do istog rezultata dolazimo ukoliko prvo u svaku kutiju ubacimo po jednu kuglicu (što je moguće uraditi samo na jedan način), a nakon toga preostalih 17 kuglica ubacimo u kutije bez ikakvih dodatnih ograničenja. Isto tako, problem se može posmatrati i kao problem nalaženja broja kompozicija broja 25 koje sadrže 8 sabiraka. Zaista, svaki razmještaj 25 kuglica u 8 kutija od kojih nijedna nije prazna može se obostrano jednoznačno kodirati kao rastava broja 25 na 8 sabiraka koji su prirodni brojevi (s obzirom da niti jedna kutija ne može biti prazna, nula kao sabirak ne dolazi u obzir), pri čemu je poredak sabiraka bitan, a to su upravo kompozicije broja 25 sa 8 sabiraka. Broj takvih kompozicija iznosi  $C(25 - 1, 8 - 1) = C(24, 7)$ , što potvrđuje prethodni rezultat.

Konačno, broj traženih načina raspoređivanja kod kojih je barem jedna kutija prazna iznosi

$$C(32, 7) - C(24, 7) = 3365856 - 346104 = 3019752$$