

Ovaj problem se najlakše rješava metodom zvjezdica i štapića, jer tada na identičan način možemo rješavati sva tri postavljena potproblema.

- a) Svaki razmještaj kuglica po kutijama možemo kodirati stringom tako što će svaka zvjezdica predstavljati jednu kuglicu, a između zvjezdica ćemo umetnuti štapiće koje označavaju "barijere" između kutija. Na taj način, grupe uzastopnih zvjezdica predstavljaju kuglice u pojedinim kutijama. Na primjer, razmještaj u kojem u prvoj kutiji imaju tri kuglice, u drugoj jedna, u trećoj nijedna, u četvrtoj pet kuglica itd. kodiramo kao string "\*\*\*|\*||\*\*\*\*\*|...". Na ovaj način, svaki razmještaj 30 kuglica u 10 kutija obostrano jednoznačno se kodira stringom koji ima 30 zvjezdica i  $10 - 1 = 9$  štapića, tj. ukupno 39 simbola. Broj ovakvih stringova možemo na više međusobno ekvivalentnih načina izraziti kao  $C(39, 9)$  ili kao  $C(39, 30)$  ili kao  $\bar{P}(39; 30, 9)$ . Prva varijanta je naklakša za računanje:

$$\begin{aligned} C(39, 9) &= \frac{39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} = \frac{36}{2 \cdot 3 \cdot 6} \cdot \frac{35}{5 \cdot 7} \cdot \frac{32}{4 \cdot 8} \cdot \frac{39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 31}{9} = \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{39}{3} \cdot \frac{33}{3} \cdot 38 \cdot 37 \cdot 34 \cdot 31 = 13 \cdot 11 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 34 \cdot 31 = 211915132 \end{aligned}$$

Ovo je ujedno i broj traženih razmještaja.

Napomena: Ovaj problem može se posmatrati i kao problem nalaženja broja kombinacija sa ponavljanjem. Zaista, označimo li zadanih 10 kutija sa  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ , svaku raspodjelu 30 kuglica u te kutije možemo predstaviti kao jednu kombinaciju sa ponavljanjem klase 30 skupa  $\{x_1, x_2, \dots, x_{10}\}$  u kojoj broj ponavljanja elementa  $x_i$  odgovara broju kuglica koje se nalaze u kutiji  $x_i$ , tj. u  $i$ -toj kutiji. Slijedi da je broj traženih razmještaja  $\bar{C}(10, 30) = C(10 + 30 - 1, 30) = C(39, 30)$ , što je još jedna potvrda izvedenog rezultata.

- b) U ovom slučaju, tražene razmještaje također možemo kodirati na sličan način, ali pri čemu svaka grupa uzastopnih zvjezdica sadrži jednu zvjezdicu manje nego što je broj kuglica u kutiji (kuglicu koja mora biti u kutiji ne kodiramo). Ovo je neophodno da bismo imali obostrano jednoznačno kodiranje (u suprotnom, svaki string koji sadrži dva uzastopna štapića ne bi kodirao niti jedan dozvoljeni razmještaj). Takvi stringovi će imati također 9 štapića, ali  $30 - 10 = 20$  zvjezdica. Ukupan broj simbola je 29, tako da broj takvih stringova  $C(29, 9)$ ,  $C(29, 20)$  ili  $\bar{P}(29; 20, 9)$ :

$$\begin{aligned} C(29, 9) &= \frac{29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} = \frac{28}{4 \cdot 7} \cdot \frac{27}{3 \cdot 9} \cdot \frac{25}{5} \cdot \frac{24}{2 \cdot 6} \cdot \frac{29 \cdot 26 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{8} = \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 2 \cdot \frac{29 \cdot 26 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{8} = 5 \cdot \frac{2}{2} \cdot 29 \cdot \frac{26}{2} \cdot 23 \cdot \frac{22}{2} \cdot 21 = 5 \cdot 1 \cdot 29 \cdot 13 \cdot 23 \cdot 11 \cdot 21 = 10015005 \end{aligned}$$

Ovo je ujedno i broj traženih razmještaja. Alternativno, do istog rezultata dolazimo ukoliko prvo u svaku kutiju ubacimo po jednu kuglicu (što je moguće uraditi samo na jedan način), a nakon toga preostalih 20 kuglica ubacimo u kutije bez ikakvih dodatnih ograničenja.

Napomena: Ovaj problem se može posmatrati i kao problem nalaženja broja kompozicija broja 30 koje sadrže 10 sabiraka. Zaista, svaki razmještaj 30 kuglica u 10 kutija od kojih nijedna nije prazna može se obostrano jednoznačno kodirati kao rastava broja 30 na 10 sabiraka koji su prirodni brojevi (s obzirom da niti jedna kutija ne može biti prazna, nula kao sabirak ne dolazi u obzir), pri čemu je poredak sabiraka bitan, a to su upravo kompozicije broja 30 sa 10 sabiraka. Broj takvih kompozicija iznosi  $C(30 - 1, 10 - 1) = C(29, 9)$ , što potvrđuje prethodni rezultat.

- c) U ovom slučaju, tražene razmještaje trebamo kodirati tako da svaka grupa uzastopnih zvjezdica sadrži dvije zvjezdice manje nego što je broj kuglica u kutiji. Takvi stringovi imaju 9 štapića i  $30 - 20 = 10$  zvjezdica, što je ukupno 19 simbola. Broj takvih stringova možemo izračunati kao  $C(19, 9)$ ,  $C(19, 10)$  ili kao  $\bar{P}(19; 10, 9)$ :

$$\begin{aligned}
C(19,9) &= \frac{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} = \frac{18}{2 \cdot 9} \cdot \frac{16}{8} \cdot \frac{15}{3 \cdot 5} \cdot \frac{14}{7} \cdot \frac{12}{6} \cdot \frac{19 \cdot 17 \cdot 13 \cdot 11}{4} = \\
&= 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{19 \cdot 17 \cdot 13 \cdot 11}{4} = 2 \cdot \frac{2 \cdot 2}{4} \cdot 19 \cdot 17 \cdot 13 \cdot 11 = 2 \cdot 1 \cdot 19 \cdot 17 \cdot 13 \cdot 11 = 92378
\end{aligned}$$

Ovo je ujedno i broj traženih razmještaja. Alternativno, do istog rezultata dolazimo ukoliko prvo u svaku kutiju ubacimo po dvije kuglice (što je moguće uraditi samo na jedan način), a nakon toga preostalih 10 kuglica ubacimo u kutije bez ikakvih dodatnih ograničenja.