Ovaj zadatak ćemo prvo riješiti na klasični (školski) način, razbijanjem na jednostavnije podslučajeve. Na osnovu kuglica koje su nam na raspolaganju, niz od 4 kuglice očigledno možemo napraviti na jedan od sljedećih načina:

– Sve četiri kuglice su različitih boja;
– Dvije kuglice su iste boje, a preostale dvije kuglice su različitih boja (koje se razlikuju od boje para kuglica koje su iste boje);
– Dvije kuglice imaju istu boju, i preostale dvije kuglice također imaju istu boju, ali drugačiju od prve boje;
– Tri kuglice su iste boje, dok je četvrta kuglica drugačije boje;
– Sve četiri kuglice su iste boje.

U prvom slučaju, vršimo izbor 4 različite boje iz skupa od 5 boja, pri čemu je poredak bitan. Ovdje se očigledno radi o varijacijama klase 4 (odnosno 4-permutacijama) skupa od 5 boja, tako da je njihov broj $\mathrm{P}(5, 4) = 5^{(4)} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$.

U drugom slučaju, boju dvije kuglice iste boje možemo izabrati iz skupa {crvena, plava, zelena, crna}, s obzirom da imamo samo jednu bijelu kuglicu. Taj izbor očigledno možemo obaviti na 4 načina. Nakon toga, iz početnog skupa od 5 boja preostaju nam 4 boje od kojih trebamo izabrati dvije različite, što možemo obaviti na $\mathrm{C}(4, 2) = (4 \cdot 3)/(1 \cdot 2) = 6$ načina (u pitanju su kombinacije, s obzirom da poredak izabranih boja ne igra nikakvu ulogu). Kad smo izvršili izbor boja, 4 kuglice od kojih su dvije iste možemo razmjestiti na $\overline{\mathrm{P}}(4; 2, 1, 1) = 4! / (2! \cdot 1! \cdot 1!) = (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)/(2 \cdot 1) = 12$ načina. Stoga, prema multiplikativnom principu ukupan broj traženih nizova u drugom slučaju iznosi $4 \cdot 6 \cdot 12 = 288$.

U trećem slučaju, dvije boje za dva različita para kuglica iste boje ponovo možemo izabrati iz skupa {crvena, plava, zelena, crna} (bijelih kuglica nema dovoljno), što možemo izvesti na $\mathrm{C}(4, 2) = 6$ načina. Nakon što izaberemo te dvije boje, dva para identičnih kuglica možemo razmjestiti na $\overline{\mathrm{P}}(4; 2, 2) = 4! / (2! \cdot 2!) = (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)/(2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1) = 6$ načina. Stoga ukupan broj traženih nizova u trećem slučaju na osnovu multiplikativnog principa iznosi $6 \cdot 6 = 36$.

U četvrtom slučaju, boja tri kuglice koje su iste boje može se izabrati iz skupa {crvena, plava, zelena} (s obzirom da crnih i bijelih kuglica nema dovoljno). Ovaj izbor možemo izvesti na 3 načina. Za koju god boju da se odlučimo, preostaju 4 boje iz kojih trebamo odabrati boju preostale kuglice, što možemo izvesti na 4 načina. Kada smo izabrali boje, tri kuglice iste boje i jednu drugačiju možemo razmjestiti na $\overline{\mathrm{P}}(4; 3, 1) = 4! / (3! \cdot 1!) = (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)/(3 \cdot 2 \cdot 1) = 4$. Na osnovu multiplikativnog principa, ukupan broj traženih nizova u četvrtom slučaju iznosi $3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$.

U petom slučaju, jasno je da moramo izabrati crvenu boju, jer jedino crvenih kuglica ima na raspolaganju 4 ili više komada. Slijedi da postoji samo jedan mogući niz petog tipa: 4 crvene kuglice.

Konačno, na osnovu aditivnog principa, ukupan broj traženih nizova iznosi

$$120 + 288 + 36 + 48 + 1 = 493$$

Pokazaćemo sada kako se do istog rezultata može doći na formalistički, mehanički način. Traženi nizovi se mogu predstaviti kao varijacije sa ponavljanjem klase 4 skupa {crvena, plava, zelena, crna, bijela} uz dopunsko ograničenje da se crvena boja smije pojaviti najviše 5 puta, plava i zelena boja najviše 3 puta, crna boja najviše 2 puta, dok se bijela boja ne smije ponavljati. Odnosno, u pitanju su 4-permutacije multiskupa $\{5 \cdot \text{crvena}, 3 \cdot \text{plava}, 3 \cdot \text{zelena}, 2 \cdot \text{crna}, 1 \cdot \text{bijela}\}$, tako da je broj traženih nizova $\mathrm{P}(5, 4; 5, 3, 3, 2, 1)$. Za k-permutacije multiskupa $\{m_1 \cdot a_1, m_2\, a_2, \ldots, m_n \cdot a_n\}$ vrijedi da njihov broj $\overline{\mathrm{P}}(n, k; m_1, m_2, \ldots, m_n)$ iznosi

$$\mathrm{P}(n, k; m_1, m_2, \ldots, m_n) = \sum_{\substack{\lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2 + \ldots + \lambda_s i_s = k \\ \mathrm{M} \geq i_1 > i_2 > \ldots > i_s \geq 1}} \binom{c(i_1)}{\lambda_1} \binom{c(i_2) - \lambda_1}{\lambda_2} \cdots \binom{c(i_s) - \lambda_1 - \lambda_2 - \ldots - \lambda_{s-1}}{\lambda_s} \frac{k!}{i_1!^{\lambda_1} i_2!^{\lambda_2} \ldots i_s!^{\lambda_s}}$$

gdje je $\mathrm{M} = \max\{m_1, m_2, ..., m_n\}$, $c(i)$ je broj brojeva m_p, $p = 1 \,..\, n$ koji su veći ili jednaki od i, dok se sumiranje vrši po svim rastavama broja k koje se mogu prikazati u obliku $k = \lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2 + ... + \lambda_s i_s$ gdje su λ_p, i_p, $p = 1 \,..\, n$ prirodni brojevi i $\mathrm{M} \geq i_1 > i_2 > ... > i_s \geq 1$.

U konkretnom problemu koji razmatramo imamo $n = 5$, $k = 4$, $m_1 = 5$, $m_2 = 3$, $m_3 = 3$, $m_4 = 2$, $m_5 = 1$, $\mathrm{M} = \max\{5, 3, 3, 2, 1\} = 5$, $c(1) = 5$, $c(2) = 4$, $c(3) = 3$ i $c(4) = 1$, dok sve rastave broja $k = 4$ traženog oblika glase $4 = 1 \cdot 4$, $4 = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1$, $4 = 2 \cdot 2$, $4 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1$ i $4 = 4 \cdot 1$, tako da imamo:

$$\overline{\mathrm{P}}(5, 4; 5, 3, 3, 2, 1) =$$

$$= \binom{c(4)}{1}\frac{4!}{4!^1} + \binom{c(3)}{1}\binom{c(1)-1}{1}\frac{4!}{3!^1 1!^1} + \binom{c(2)}{2}\frac{4!}{2!^2} + \binom{c(2)}{1}\binom{c(1)-1}{2}\frac{4!}{2!^1 1!^1} + \binom{c(1)}{4}\frac{4!}{1!^4} =$$

$$= \binom{1}{1}\frac{4!}{4!^1} + \binom{3}{1}\binom{5-1}{1}\frac{4!}{3!^1 1!^1} + \binom{4}{2}\frac{4!}{2!^2} + \binom{4}{1}\binom{5-1}{2}\frac{4!}{2!^1 1!^1} + \binom{5}{4}\frac{4!}{1!^4} =$$

$$= \frac{1}{1} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{3}{1} \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{4}{1} \cdot \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1} =$$

$$= 1 \cdot 1 + 3 \cdot 4 \cdot 4 + 6 \cdot 6 + 4 \cdot 6 \cdot 12 + 5 \cdot 24 = 1 + 48 + 36 + 288 + 120 = 493$$

Vidimo da smo do istog rezultata došli potpuno mehaničkim putem.

Riješimo još problem i pomoću funkcija izvodnica. $\overline{\mathrm{P}}(n, k; m_1, m_2, ..., m_n)$ se može se dobiti kao koeficijent uz t^k u polinomu

$$\psi(n; m_1, m_2, ..., m_n; t) = \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{t^j}{j!}$$

pomnožen sa $k!$ Za konkretan slučaj $\overline{\mathrm{P}}(5, 4; 5, 3, 3, 2, 1)$ imamo

$$\psi(5; 5, 3, 3, 2, 1; t) = (1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + ...)(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!})^2 (1 + t + \frac{t^2}{2!})(1 + t) =$$

$$= (1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + ...)(1 + 2t + 2t^2 + \frac{4}{3}t^3 + \frac{7}{12}t^4 + ...)(1 + 2t + \frac{3}{2}t^2 + \frac{t^3}{2}) =$$

$$= (1 + 3t + \frac{9}{2}t^2 + \frac{9}{2}t^3 + \frac{79}{24}t^4 + ...)(1 + 2t + \frac{3}{2}t^2 + \frac{t^3}{2}) =$$

$$= 1 + 5t + 12t^2 + \frac{37}{2}t^3 + \frac{493}{24}t^4 + ...$$

Ovdje su sa tri tačkice označeni članovi višeg reda od $k = 4$, koje svakako ne treba računati ni u međurezultatima, s obzirom da ne utiču na konačni rezultat. Na kraju, traženi broj nizova kuglica iznosi

$$4! \cdot \frac{493}{24} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{493}{24} = 493$$

Vidimo da smo ponovo dobili isti rezultat. U razmotrenom primjeru, primjena funkcija izvodnica nije baš praktična za ručni rad, jer treba obaviti dosta računanja. Međutim, od svih razmotrenih načina, korištenje funkcija izvodnica pri rješavanju ovog tipa problema traži najmanje razmišljanja (tj. postupak je posve formaliziran i šabloniziran), te je ovaj postupak veoma pogodan za implementaciju na računaru.