

Riješićemo prvo ovaj zadatak na klasični (školski) način, odnosno razbijanjem na podslučajeve. Trocifreni brojevi sastavljeni od cifara u broju 2524725 mogu imati:

- Sve tri cifre različite;
- Dvije cifre iste, a treća cifra se razlikuje od njih;
- Sve tri cifre iste.

Ukoliko pravimo trocifren broj sa svim različitim ciframa, to možemo uraditi na $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ načina. Zaista, na raspolaganju su nam cifre 2, 4, 5 i 7, tako da prvu cifru možemo odabrati na 4 načina, nakon toga, drugu na tri načina (jer ne uzimamo opet istu cifru), itd. Alternativno, takve brojeve možemo posmatrati i kao varijacije klase 3 (odnosno 3-permutacije) skupa $\{2, 4, 5, 7\}$, tako da je njihov broj zaista $P(4, 3) = 4^{(3)} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

Ukoliko pravimo trocifren broj tako da u njemu imamo dvije iste cifre, te cifre mogu biti samo 2 ili 5 (dva načina), jer se samo one u broju 2524725 javljaju barem dvaput. Kada izaberemo tu cifru, preostalu cifru možemo izabrati na 3 načina (jer su ostale 3 cifre), a poziciju preostale cifre u trocifrenom broju također možemo izabrati na 3 načina. Prema multiplikativnom principu, to je ukupno $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ varijanti.

Što se tiče trocifrenih brojeva koje možemo napraviti sa 3 jednake cifre, jedini takav broj je 222, jer se samo cifra 2 ponavlja triput u zadanom broju.

Kada sve rezimiramo, traženi broj trocifrenih brojeva koji se mogu napraviti od cifara polaznog broja prema aditivnom principu iznosi

$$24 + 18 + 1 = 43$$

Sada ćemo do istog rezultata doći formalnim, mehaničkim putem. Traženi brojevi se mogu predstaviti kao varijacije sa ponavljanjem klase 3 skupa $\{2, 4, 5, 7\}$ uz dopunsko ograničenje da se cifra 2 smije ponavljati najviše 3 puta, cifra 5 najviše 2 puta, dok se cifre 4 i 7 ne smiju ponavljati, odnosno kao 3-permutacije multiskupa $\{3 \cdot 2, 1 \cdot 4, 2 \cdot 5, 1 \cdot 7\}$. Stoga je broj traženih riječi zapravo $\overline{P}(4, 3; 3, 1, 1, 1)$. Za k -permutacije multiskupa $\{m_1 \cdot a_1, m_2 \cdot a_2, \dots, m_n \cdot a_n\}$ vrijedi da njihov broj $\overline{P}(n, k; m_1, m_2, \dots, m_n)$ iznosi

$$\overline{P}(n, k; m_1, m_2, \dots, m_n) = \sum_{\substack{\lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2 + \dots + \lambda_s i_s = k \\ M \geq i_1 > i_2 > \dots > i_s \geq 1}} \binom{c(i_1)}{\lambda_1} \binom{c(i_2) - \lambda_1}{\lambda_2} \dots \binom{c(i_s) - \lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_{s-1}}{\lambda_s} \frac{k!}{i_1!^{\lambda_1} i_2!^{\lambda_2} \dots i_s!^{\lambda_s}}$$

gdje je $M = \max\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$, $c(i)$ je broj brojeva m_p , $p = 1 \dots n$ koji su veći ili jednaki od i , dok se sumiranje vrši po svim rastavama broja k koje se mogu prikazati u obliku $k = \lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2 + \dots + \lambda_s i_s$ gdje su λ_p, i_p , $p = 1 \dots n$ prirodni brojevi i $M \geq i_1 > i_2 > \dots > i_s \geq 1$.

U konkretnom primjeru imamo $n = 4$, $k = 3$, $m_1 = 3$, $m_2 = 1$, $m_3 = 2$, $m_4 = 1$, $M = \max\{3, 1, 2, 1\} = 3$, $c(1) = 4$, $c(2) = 2$ i $c(3) = 1$, dok sve rastave broja $k = 3$ traženog oblika glase $3 = 1 \cdot 3$, $3 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1$ i $3 = 3 \cdot 1$, tako da imamo:

$$\begin{aligned} \overline{P}(4, 3; 3, 1, 2, 1) &= \binom{c(3)}{1} \frac{3!}{3!^1} + \binom{c(2)}{1} \binom{c(1) - 1}{1} \frac{3!}{2!^1 1!^1} + \binom{c(1)}{3} \frac{3!}{1!^3} = \\ &= \binom{1}{1} \frac{3!}{3!^1} + \binom{2}{1} \binom{4-1}{1} \frac{3!}{2!^1 1!^1} + \binom{4}{3} \frac{3!}{1!^3} = \frac{1}{1} \cdot \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = \\ &= 1 + 2 \cdot 3 \cdot 3 + 4 \cdot 6 = 1 + 18 + 24 = 43 \end{aligned}$$

Ovim smo potvrdili već dobijeni rezultat formalnim putem.

Izvedimo još isti rezultat pomoću funkcija izvodnica, što je način koji za ovu vrstu problema traži najmanje razmišljanja, te je pogodan za realizaciju na računaru. Poznato je da se $\bar{P}(n, k; m_1, m_2, \dots, m_n)$ može se dobiti kao koeficijent uz t^k u polinomu

$$\psi(n; m_1, m_2, \dots, m_n; t) = \prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} \frac{t^j}{j!}$$

pomnožen sa $k!$ Za konkretan slučaj $\bar{P}(4, 3; 3, 1, 2, 1)$ imamo

$$\begin{aligned} \psi(4; 3, 1, 2, 1; t) &= (1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!})(1+t+\frac{t^2}{2!})(1+t)^2 = \\ &= (1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6})(1+t+\frac{t^2}{2})(1+2t+t^2) = (1+2t+2t^2+\frac{7}{6}t^3+\dots)(1+2t+t^2) = \\ &= 1+4t+7t^2+\frac{43}{6}t^3+\dots \end{aligned}$$

Ovdje su sa tri tačkice označeni članovi višeg reda od $k = 3$, koje treba radi uštede u računu izostavljati i u međurezultatima, jer svakako neće uticati na konačni rezultat. Na kraju, traženi broj brojeva iznosi

$$3! \cdot \frac{43}{6} = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{43}{6} = 43$$