

Klasični (školski) način rješavanja ovog zadatka je razbijanjem na podslučajeve. Troslovne riječi sastavljene od slova u riječi “PARADA” mogu imati:

- Sva tri slova različita;
- Dva slova ista, a treće slovo se razlikuje od njih;
- Sva tri slova ista.

U prvom slučaju, na raspolaganju nam je skup slova {P, A, R, D}. Prvo slovo možemo izabrati na 4 načina, drugo na 3 načina (jer smo jedno već izabrali), a treće na 2 načina (jer smo dva već izabrali), Prema multiplikativnom principu, ukupan broj takvih riječi je $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Alternativno, te riječi možemo posmatrati kao varijacije klase 3 (odnosno 3-permutacije) skupa {P, A, R, D}, tako da je njihov broj zaista $P(4, 3) = 4^{(3)} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

U drugom slučaju, slovo koje se ponavlja može biti samo “A”, jer je to jedino slovo koje se u riječi “PARADA” javlja više od jedanput. Dva slova “A” na tri raspoložive pozicije možemo razmjestiti na $C(3, 2) = (3 \cdot 2) / (1 \cdot 2) = 3$ načina (u pitanju su kombinacije, jer poredak pozicija ne igra nikakvu ulogu), a za preostalo slovo imamo ukupno 3 mogućnosti, jer su nam ostala slova iz skupa {P, R, D}. Prema multiplikativnom principu, takvih riječi ima ukupno $3 \cdot C(3, 2) = 3 \cdot 3 = 9$. Alternativno smo prvo mogli odabrati preostalo slovo (na 3 načina), te njegovu poziciju (ponovo na 3 načina), nakon čega je pozicija preostalih slova “A” jednoznačno određena. Broj varijanti je ponovo $3 \cdot 3 = 9$.

U trećem slučaju, moguće je napraviti samo jednu riječ sa tri ista slova (riječ “AAA”), jer se samo slovo “A” u riječi “PARADA” javlja tri puta.

Kako se ove tri mogućnosti međusobno isključuju, prema aditivnom principu ukupan broj traženih riječi iznosi:

$$24 + 9 + 1 = 34$$

Pokažimo i kako se do istog rezultata može doći i formalnim putem, dakle “šablonski”, bez mnogo razmišljanja. Tražene riječi se mogu predstaviti kao varijacije sa ponavljanjem klase 3 skupa {P, A, R, D} uz dopunsko ograničenje da se samo slovo “A” smije ponavljati i to najviše 3 puta, dok se ostala slova ne smiju ponavljati, odnosno kao 3-permutacije multiskupa $\{3 \cdot A, 1 \cdot P, 1 \cdot R, 1 \cdot D\}$. Stoga je broj traženih riječi zapravo $\bar{P}(4, 3; 3, 1, 1, 1)$. Za k -permutacije multiskupa $\{m_1 \cdot a_1, m_2 \cdot a_2, \dots, m_n \cdot a_n\}$ vrijedi da njihov broj $\bar{P}(n, k; m_1, m_2, \dots, m_n)$ iznosi

$$\bar{P}(n, k; m_1, m_2, \dots, m_n) = \sum_{\substack{\lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2 + \dots + \lambda_s i_s = k \\ M \geq i_1 > i_2 > \dots > i_s \geq 1}} \binom{c(i_1)}{\lambda_1} \binom{c(i_2) - \lambda_1}{\lambda_2} \dots \binom{c(i_s) - \lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_{s-1}}{\lambda_s} \frac{k!}{i_1!^{\lambda_1} i_2!^{\lambda_2} \dots i_s!^{\lambda_s}}$$

gdje je $M = \max\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$, $c(i)$ je broj brojeva m_p , $p = 1 \dots n$ koji su veći ili jednaki od i , dok se sumiranje vrši po svim rastavama broja k koje se mogu prikazati u obliku $k = \lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2 + \dots + \lambda_s i_s$ gdje su λ_p, i_p , $p = 1 \dots n$ prirodni brojevi i $M \geq i_1 > i_2 > \dots > i_s \geq 1$.

U našem konkretnom slučaju je $n = 4$, $k = 3$, $m_1 = 3$, $m_2 = 1$, $m_3 = 1$, $m_4 = 1$, $M = \max\{3, 1, 1, 1\} = 3$, $c(1) = 4$, $c(2) = 1$ i $c(3) = 1$, dok sve rastave broja $k = 3$ traženog oblika glase $3 = 1 \cdot 3$, $3 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1$ i $3 = 3 \cdot 1$, tako da imamo:

$$\begin{aligned} \bar{P}(4, 3; 3, 1, 1, 1) &= \binom{c(3)}{1} \frac{3!}{3!^1} + \binom{c(2)}{1} \binom{c(1) - 1}{1} \frac{3!}{2!^1 1!^1} + \binom{c(1)}{3} \frac{3!}{1!^3} = \\ &= \binom{1}{1} \frac{3!}{3!^1} + \binom{1}{1} \binom{4-1}{1} \frac{3!}{2!^1 1!^1} + \binom{4}{3} \frac{3!}{1!^3} = \frac{1}{1} \cdot \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{1}{1} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = \\ &= 1 + 1 \cdot 3 \cdot 3 + 4 \cdot 6 = 1 + 9 + 24 = 34 \end{aligned}$$

Vidimo da smo do istog rješenja došli i čisto mehaničkim putem.

Još jedan mehanički način za rješavanje ovog problema, koji je još pogodniji za rješavanje putem računara je preko funkcija izvodnica. Naime, $\bar{P}(n, k; m_1, m_2, \dots, m_n)$ može se dobiti kao koeficijent uz t^k u polinomu

$$\psi(n; m_1, m_2, \dots, m_n; t) = \prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} \frac{t^j}{j!}$$

pomnožen sa $k!$ Za konkretan slučaj $\bar{P}(4, 3; 3, 1, 1, 1)$ imamo

$$\begin{aligned} \psi(4; 3, 1, 1, 1; t) &= \left(1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}\right)(1+t)^3 = \left(1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}\right)(1+3t+3t^2+t^3) = \\ &= 1+4t+\frac{13}{2}t^2+\frac{17}{3}t^3+\dots \end{aligned}$$

Sa tri tačkice su označeni članovi višeg reda od $k=3$, koji nam nisu potrebni. Stoga je traženi broj riječi dat kao

$$3! \cdot \frac{17}{3} = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{17}{3} = 34$$

Ponovo smo došli do istog rješenja, ovaj put na posve formalan i potpuno mehanički način.