

Neka su m_1 , m_2 i m_3 redom broj bekova, centara i krila u izabranoj petorki. m_1 bekova od ukupno 5 bekova možemo izabrati na $C(5, m_1)$ načina. Zaista, ti izbori mogu se predstaviti kao kombinacije klase m_1 (odnosno m_1 -kombinacije) skupa bekova, s obzirom da poredak izabranih bekova ne igra nikakvu ulogu. Slično, m_2 centara od ukupno 4 centra možemo izabrati na $C(4, m_2)$ načina, a m_3 krila od ukupno 3 krila na $C(3, m_3)$ načina. Prema multiplikativnom principu, slijedi da broj petorki koje sadrže m_1 bekova, m_2 centara i m_3 krila iznosi

$$C(5, m_1) C(4, m_2) C(3, m_3)$$

Pogledajmo sada kakve su nam mogućnosti za m_1 , m_2 i m_3 . Prema uvjetima zadatka imamo:

$$m_1 + m_2 + m_3 = 5, \quad 2 \leq m_1 \leq 5, \quad 1 \leq m_2 \leq 4, \quad m_3 \leq 3$$

Kako su pored toga m_1 , m_2 i m_3 nenegativni cijeli brojevi, slijedi da su jedine mogućnosti za m_1 , m_2 i m_3 sljedeće:

$$\begin{aligned} m_1 = 4, m_2 = 1, m_3 = 0 \\ m_1 = 3, m_2 = 2, m_3 = 0 \\ m_1 = 3, m_2 = 1, m_3 = 1 \\ m_1 = 2, m_2 = 3, m_3 = 0 \\ m_1 = 2, m_2 = 2, m_3 = 1 \\ m_1 = 2, m_2 = 1, m_3 = 2 \end{aligned}$$

Kako se ove mogućnosti međusobno isključuju, ukupan broj traženih petorki po aditivnom principu iznosi:

$$\begin{aligned} & C(5, 4) C(4, 1) C(3, 0) + C(5, 3) C(4, 2) C(3, 0) + C(5, 3) C(4, 1) C(3, 1) + \\ & + C(5, 2) C(4, 3) C(3, 0) + C(5, 2) C(4, 2) C(3, 1) + C(5, 2) C(4, 1) C(3, 2) = \\ = & \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{4}{1} \cdot 1 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot 1 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{3}{1} + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 1 + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{3}{1} + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = \\ = & 5 \cdot 4 \cdot 1 + 10 \cdot 6 \cdot 1 + 10 \cdot 4 \cdot 3 + 10 \cdot 4 \cdot 1 + 10 \cdot 6 \cdot 3 + 10 \cdot 4 \cdot 3 = \\ = & 20 + 60 + 120 + 40 + 180 + 120 = 540 \end{aligned}$$

Postoje i drugi načini da se riješi zadatak. Recimo, moguće je prvo naći broj petorki koje ne ispunjavaju uvjet da u njima imaju barem dva beka i barem jedan centar, odnosno onih kod kojih je jedan ili nijedan bek, ili nijedan centar. To daje sljedeće uvjete za m_1 , m_2 i m_3 :

$$m_1 + m_2 + m_3 = 5, \quad m_1 \leq 5, \quad m_2 \leq 4, \quad m_3 \leq 3, \quad m_1 < 2 \vee m_2 < 1$$

Odavde dobijamo sljedeće mogućnosti za m_1 , m_2 i m_3 :

$$\begin{aligned} m_1 = 1, m_2 = 4, m_3 = 0 \\ m_1 = 1, m_2 = 3, m_3 = 1 \\ m_1 = 1, m_2 = 2, m_3 = 2 \\ m_1 = 1, m_2 = 1, m_3 = 3 \\ m_1 = 0, m_2 = 4, m_3 = 1 \\ m_1 = 0, m_2 = 3, m_3 = 2 \\ m_1 = 0, m_2 = 2, m_3 = 3 \\ m_1 = 5, m_2 = 0, m_3 = 0 \\ m_1 = 4, m_2 = 0, m_3 = 1 \\ m_1 = 3, m_2 = 0, m_3 = 2 \\ m_1 = 2, m_2 = 0, m_3 = 3 \end{aligned}$$

Odmah vidimo da je ovaj pristup nepovoljniji u odnosu na prvi pristup, s obzirom da je potrebno razmotriti 11 podslučajeva, dok je prvi pristup zahtijevao razmatranje 6 podslučajeva. Ipak, čisto radi demonstracije, uradićemo zadatak i na ovaj način. Kako se razmotreni podslučajevi međusobno isključuju, ukupan broj traženih petorki u kojima se ne nalaze barem dva beka i barem jedan centar po aditivnom principu iznosi:

$$\begin{aligned}
 & C(5, 1)C(4, 4)C(3, 0) + C(5, 1)C(4, 3)C(3, 1) + C(5, 1)C(4, 2)C(3, 2) + C(5, 1)C(4, 1)C(3, 3) + \\
 & \quad + C(5, 0)C(4, 4)C(3, 1) + C(5, 0)C(4, 3)C(3, 2) + C(5, 0)C(4, 2)C(3, 3) + \\
 & \quad + C(5, 5)C(4, 0)C(3, 0) + C(5, 4)C(4, 0)C(3, 1) + C(5, 3)C(4, 0)C(3, 2) + C(5, 2)C(4, 0)C(3, 3) = \\
 & = \frac{5}{1} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 1 + \frac{5}{1} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{3}{1} + \frac{5}{1} \cdot \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} + \frac{5}{1} \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + 1 \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{3}{1} + 1 \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} + \\
 & \quad + 1 \cdot \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 1 \cdot \frac{3}{1} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 1 \cdot \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot 1 \cdot \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \\
 & \quad = 5 \cdot 1 \cdot 1 + 5 \cdot 4 \cdot 3 + 5 \cdot 6 \cdot 3 + 5 \cdot 4 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 \cdot 3 + \\
 & \quad \quad + 1 \cdot 6 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 5 \cdot 1 \cdot 3 + 10 \cdot 1 \cdot 3 + 10 \cdot 1 \cdot 1 = \\
 & = 5 + 60 + 90 + 20 + 3 + 12 + 6 + 1 + 15 + 30 + 10 = 252
 \end{aligned}$$

Dakle, imaju 252 petorki u kojima se ne nalaze barem dva beka i barem jedan centar. Broj petorki u kojima se nalaze barem dva beka i barem jedan centar dobićemo tako što ćemo oduzeti nađeni broj od ukupnog broja petorki koje se mogu napraviti bez ikakvih ograničenja na broj bekova, centara i krila. Pošto se taj problem svodi prosto na izbor 5 igrača iz ukupnog skupa od $5 + 4 + 3 = 12$ igrača, broj takvih petorki iznosi

$$C(12, 5) = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{12}{3 \cdot 4} \cdot 11 \cdot \frac{10}{2 \cdot 5} \cdot 9 \cdot 8 = 11 \cdot 9 \cdot 8 = 792$$

Stoga, traženi broj petorki koje sadrže barem dva beka i barem jedan centar iznosi

$$792 - 252 = 540$$

Vidimo da smo dobili isti rezultat kao i korištenjem prvog pristupa.