a) Kako je eksponent relativno mali, odmah ćemo primijeniti metod “kvadriraj-i-množi”:

$$([7]_{91})^2 = [49]_{91}$$
$$([7]_{91})^4 = ([49]_{91})^2 = [2401]_{91} = [\mathrm{mod}(2401, 91)]_{91} = [35]_{91}$$
$$([7]_{91})^8 = ([35]_{91})^2 = [1225]_{91} = [\mathrm{mod}(1225, 91)]_{91} = [42]_{91}$$
$$([7]_{91})^{16} = ([42]_{91})^2 = [1764]_{91} = [\mathrm{mod}(1764, 91)]_{91} = [35]_{91}$$

Konačno je:

$$([7]_{91})^{20} = ([7]_{91})^{16}([7]_{91})^4 = ([35]_{91})([35]_{91}) = [1225]_{91} = [42]_{91}$$

b) Kako je $80 > 65$ i $\mathrm{NZD}(4, 65) = 1$, isplati se reducirati eksponent prema Fermat-Eulerovoj teoremi. Imamo:

$$\varphi(65) = \varphi(5 \cdot 13) = \varphi(5 \cdot 13) = \varphi(5)\,\varphi(13) = (5-1)(13-1) = 48.$$

Sada, na osnovu Fermat-Eulerove teoreme imamo:

$$([4]_{65})^{80} = ([4]_{65})^{\mathrm{mod}(80,\ \varphi(65))} = ([4]_{65})^{\mathrm{mod}(80,\ 48)} = ([4]_{65})^{32}.$$

Dalje nastavljamo prema metodu “kvadriraj-i-množi”:

$$([4]_{65})^2 = [16]_{65}$$
$$([4]_{65})^4 = ([16]_{65})^2 = [256]_{65} = [\mathrm{mod}(256, 65)]_{65} = [61]_{65}$$
$$([4]_{65})^8 = ([61]_{65})^2 = [3721]_{65} = [\mathrm{mod}(3721, 65)]_{65} = [16]_{65}$$
$$([4]_{65})^{16} = ([16]_{65})^2 = [61]_{65}$$
$$([4]_{65})^{32} = ([61]_{65})^2 = [16]_{65}$$

Ovdje smo samo prepisali rezultate koji su već jednom izračunati. Dakle, imamo:

$$([4]_{65})^{80} = ([4]_{65})^{32} = [16]_{65}$$

c) I ovdje je isplativa redukcija eksponenta, jer je $100 > 79$ i $\mathrm{NZD}(3, 79) = 1$. Kako je 79 prost broj, to je $\varphi(79) = 79 - 1 = 78$. Stoga je:

$$([3]_{79})^{100} = ([3]_{79})^{\mathrm{mod}(100,\ \varphi(79))} = ([3]_{79})^{\mathrm{mod}(100,\ 78)} = ([3]_{79})^{22}.$$

Dalje nastavljamo prema metodu “kvadriraj-i-množi”:

$$([3]_{79})^2 = [9]_{79}$$
$$([3]_{79})^4 = ([9]_{79})^2 = [81]_{79} = [\mathrm{mod}(81, 79)]_{79} = [2]_{79}$$
$$([3]_{79})^8 = ([2]_{79})^2 = [4]_{79}$$
$$([3]_{79})^{16} = ([4]_{79})^2 = [16]_{79}$$

Konačno je:

$$([3]_{79})^{100} = ([3]_{79})^{22} = ([3]_{79})^{16}([3]_{79})^4([3]_{79})^2 = ([16]_{79})([2]_{79})([9]_{79}) =$$
$$= ([16]_{79})([18]_{79}) = ([288]_{79}) = [\mathrm{mod}(288, 79)]_{79} = [51]_{79}$$

d) Redukcija eksponenta ovdje bi bila veoma korisna, jer je eksponent 100000 prilično velik. Nažalost, imamo $\mathrm{NZD}(6, 24) = 6 \neq 1$, pa Fermat-Eulerova teorema ne vrijedi. Srećom, vidjećemo da to ovdje nije problem. Zaista, imamo:

$$([6]_{24})^2 = [36]_{24} = [\mathrm{mod}(36, 24)]_{24} = [12]_{24}$$
$$([6]_{24})^4 = ([12]_{24})^2 = [144]_{24} = [\mathrm{mod}(144, 24)]_{24} = [0]_{24}$$

Dakle, imamo $([6]_{24})^4 = [0]_{24}$, pa je jasno da je $([6]_{24})^k = [0]_{24}$ za sve $k \geq 4$ (zapravo, ovo vrijedi već za $k \geq 3$). Stoga je:

$$([6]_{24})^{1000000} = [0]_{24}.$$

e) Bespredmetno je i govoriti da je u ovom slučaju redukcija eksponenta od velike koristi. Kako je 23 prost broj, to je $\varphi(23) = 23 - 1 = 22$. Sada prema Fermat-Eulerovoj teoremi imamo:

$$([7]_{23})^{1000000} = ([7]_{23})^{\mathrm{mod}(1000000,\, 22)} = ([7]_{23})^{12}$$

Dalje, imamo:

$$([7]_{23})^2 = [49]_{23} = [3]_{23}$$
$$([7]_{23})^4 = ([3]_{23})^2 = [9]_{23}$$
$$([7]_{23})^8 = ([9]_{23})^2 = [81]_{23} = [12]_{23}$$

Konačno je:

$$([7]_{23})^{1000000} = ([7]_{23})^{12} = ([7]_{23})^8 ([7]_{23})^4 = ([12]_{23})([9]_{23}) = [108]_{23} = [16]_{23}$$