a) Jednačina je rješiva (u skupu $\mathbb{Z}$), jer je $\text{NZD}(9,15) = 3$ i $3 \mid 210$. Nakon dijeljenja sa 3, jednačina postaje $3x + 5y = 70$, pri čemu je $\text{NZD}(3,5) = 1$. Sada treba NZD(3, 5) izraziti kao linearnu kombinaciju brojeva 3 i 5:

$$5 = 1 \cdot 3 + 2 \;\Rightarrow\; 2 = 5 - 3$$
$$3 = 1 \cdot 2 + 1 \;\Rightarrow\; 1 = 3 - 2 = 3 - (5 - 3) = 2 \cdot 3 - 5$$
$$2 = 2 \cdot \underline{1} + 0$$

Dakle, imamo rastavu $1 = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 5$. Stoga je jedno rješenje (bez ograničenja da rješenja moraju biti prirodni brojevi) dato kao

$$x_0 = 2 \cdot 70 = 140, \quad y_0 = -1 \cdot 70 = 70$$

dok se sva rješenja (također bez ograničenja da rješenja moraju biti prirodni brojevi) mogu izraziti u obliku

$$x = x_0 + 5t = 140 + 5t, \quad y = y_0 - 3t = -70 - 3t, \quad t \in \mathbb{Z} \text{ (proizvoljno)}$$

Sad ćemo iz ovog skupa rješenja izdvojiti ona koja su prirodni brojevi (primijetimo da rješenje $x = x_0$ i $y = y_0$ ne zadovoljava ovaj uvjet). Ograničenja $x \in \mathbb{N}$ i $y \in \mathbb{N}$ prvo nameću da mora biti $x > 0$ i $y > 0$ tako da imamo

$$x > 0 \;\Rightarrow\; 140 + 5t > 0 \;\Rightarrow\; t > -28$$
$$y > 0 \;\Rightarrow\; -70 - 3t > 0 \;\Rightarrow\; t < -70/3 \approx -23.3$$

Kako t mora biti cijeli broj, slijedi da t može imati samo vrijednosti –27, –26, –25 ili –24, što daje četiri moguća rješenja u skupu prirodnih brojeva:

$$x = 5,\, y = 11; \qquad x = 10,\, y = 8; \qquad x = 15,\, y = 5; \qquad x = 20,\, y = 2;$$

Riješićemo ponovo istu jednačinu na drugi (elememtarniji) način, koji se ne oslanja na Euklidov algoritam. Ukoliko jednačinu $3x + 5y = 70$ riješimo po x dobijamo:

$$x = \frac{70 - 5y}{3} = 23 - y + \frac{1 - 2y}{3}$$

Da bi x bio cijeli broj, izraz $1 - 2y$ mora biti djeljiv sa 3, odnosno mora biti $1 - 2y = 3n$, gdje je n proizvoljan cijeli broj. Ovo dovodi do Diofantove jednačine $2y + 3n = 1$, pri čemu su sada nepoznate y i n. Nastavićemo dalje isti postupak, pri čemu ćemo pojedine detalje prikazivati u sažetijoj formi:

$$2y + 3n = 1 \;\Rightarrow\; y = \frac{1 - 3n}{2} = -n + \frac{1 - n}{2}$$

$$y \in \mathbb{Z} \;\Rightarrow\; 2 \mid (1 - n) \;\Rightarrow\; 1 - n = 2m \; (m \in \mathbb{Z}) \;\Rightarrow\; n = 1 - 2m \; (m \in \mathbb{Z})$$

Dakle, imamo $n = 1 - 2m$ pri čemu je m proizvoljan cijeli broj. Do rješenja za x i y sada dolazimo uvrštavanjem unazad:

$$y = \frac{1 - 3n}{2} = \frac{1 - 3(1 - 2m)}{2} = -1 + 3m$$
$$x = \frac{70 - 5y}{3} = \frac{70 - 5(-1 + 3m)}{3} = 25 - 5m$$

Opće rješenje (u skupu $\mathbb{Z}$) koje smo dobili na ovaj način nema isti oblik kao opće rješenje dobijeno Euklidovim algoritmom, ali su oba ekvivalentna u smislu da generiraju isti skup rješenja (zaista, smjenom $m \to -23-t$ ovo rješenje se svodi na prethodno nađeni oblik). U svakom slučaju, ako tražimo rješenja koja su prirodni brojevi, imaćemo

$$x > 0 \;\Rightarrow\; 25-5m > 0 \;\;\Rightarrow\;\; m < 5$$
$$y > 0 \;\Rightarrow\; -1+3m > 0 \;\;\Rightarrow\;\; m > 1/3 \approx 0.33$$

Zbog cjelobrojnosti, m može biti samo 1, 2, 3 ili 4, čime dobijamo ista rješenja u skupu $\mathbb{N}$ kao i na prvi način.

Vrijedi napomenuti i da minimalno rješenje ove jednačine (tj. rješenje za koju je vrijednost $|x|+|y|$ minimalna) glasi $x_{min} = 0$, $y_{min} = 14$, tako da kanonski oblik rješenja ove jednačine (u skupu $\mathbb{Z}$) glasi

$$x = 5t, \quad y = 14-3t, \quad t \in \mathbb{Z} \text{ (proizvoljno)}$$

Ponovo, ukoliko tražimo rješenja u skupu $\mathbb{N}$, dobijamo da t može biti samo 1, 2, 3 ili 4, što još jedanput daje ista rješenja u skupu $\mathbb{N}$ koja smo već dobili.

b) Jednačina je rješiva (u skupu $\mathbb{Z}$), jer je $\text{NZD}(15, 27) = 3$ i $3 \mid 333$. Nakon dijeljenja sa 3, dobijamo jednačinu $5x+9y = 111$, pri čemu je $\text{NZD}(5, 9) = 1$. Izrazimo sada $\text{NZD}(5, 9)$ kao linearnu kombinaciju brojeva 5 i 9:

$$9 = 1 \cdot 5 + 4 \;\Rightarrow\; 4 = 9-5$$
$$5 = 1 \cdot 4 + 1 \;\Rightarrow\; 1 = 5-4 = 5-(9-5) = 2 \cdot 5 - 9$$
$$4 = 4 \cdot \underline{1} + 0$$

Sada na osnovu činjenice da je $\text{NZD}(5, 9) = 2 \cdot 5 - 1 \cdot 9$, slijedi da je opće rješenje jednačine u skupu cijelih brojeva dato kao

$$x = 2 \cdot 111 + 9t = 222+9t, \quad y = -1 \cdot 111 - 5t = -111-5t, \quad t \in \mathbb{Z} \text{ (proizvoljno)}$$

Da bi rješenja bila iz skupa $\mathbb{N}$, mora biti $x > 0$ i $y > 0$, odnosno $222+9t > 0$ i $-111-5t > 0$, iz čega slijedi $t > -74/3 \approx -24.667$ i $t < -111/5 = -22.2$. S obzirom da je t cijeli broj, slijedi da mora biti $t \in \{-24, -23\}$, što daje 2 moguća rješenja za x i y u skupu $\mathbb{N}$:

$$x = 6,\ y = 9; \qquad x = 15,\ y = 4$$

Interesantno je riješiti istu jednačinu i na drugi način. Ukoliko jednačinu $5x+9y = 111$ riješimo po x dobijamo:

$$x = \frac{111-9y}{5} = 22-y+\frac{1-4y}{5}$$

Da bi x bio cijeli broj, izraz $1-4y$ mora biti djeljiv sa 5, odnosno mora biti $1-4y = 5n$, gdje je n proizvoljan cijeli broj. Ovo dovodi do Diofantove jednačine $4y+5n = 1$, pri čemu su sada nepoznate y i n. Dalje postupak ide ovako:

$$4y+5n = 1 \;\Rightarrow\; y = \frac{1-5n}{4} = -n+\frac{1-n}{4}$$
$$y \in \mathbb{Z} \;\Rightarrow\; 4 \mid (1-n) \;\Rightarrow\; 1-n = 4m \;(m \in \mathbb{Z}) \;\Rightarrow\; n = 1-4m \;(m \in \mathbb{Z})$$

Dakle, imamo $n = 1 - 4m$, gdje je m proizvoljan cijeli broj. Sada ćemo primijeniti razmotavanje unazad da dođemo do rješenja:

$$y = \frac{1-5n}{4} = \frac{1-5(1-4m)}{4} = -1 + 5m$$

$$x = \frac{111-9y}{5} = \frac{111-9(-1+5m)}{5} = 24 - 9m$$

Opće rješenje (u skupu $\mathbb{Z}$) dobijeno na ovaj način ponovo nema isti oblik kao opće rješenje dobijeno Euklidovim algoritmom, ali su naravno oba ekvivalentna. Zaista, smjenom $m \to -22 - t$ ovo rješenje se svodi na prethodno nađeni oblik. U svakom slučaju, ako tražimo rješenja u skupu $\mathbb{N}$, tada mora biti

$$x > 0 \;\Rightarrow\; 24 - 9m > 0 \;\Rightarrow\; m < 8/3 \approx 2.67$$

$$y > 0 \;\Rightarrow\; -1 + 5m > 0 \;\Rightarrow\; m > 1/5 = 0.2$$

Zbog cjelobrojnosti, m može biti samo 1 ili 2, čime dobijamo ista rješenja u skupu $\mathbb{N}$ kao i na prvi način. Inače, minimalno rješenje ove jednačine glasi $x_{min} = 6$, $y_{min} = 9$ (i ono slučajno pripada skupu $\mathbb{N}$) tako da kanonski oblik rješenja ove jednačine (u skupu $\mathbb{Z}$) glasi

$$x = 6 + 9t, \quad y = 9 - 5t, \quad t \in \mathbb{Z} \text{ (proizvoljno)}$$

Ukoliko tražimo rješenja u skupu $\mathbb{N}$, t može biti samo 0 ili 1, što potvrđuje rješenja u skupu $\mathbb{N}$ koja smo već dobili.

c) Jednačina je rješiva (u skupu $\mathbb{Z}$), jer je NZD$(9, -4) = 1$, i $1 \mid 3$. Izrazimo NZD$(9, -4)$ kao linearnu kombinaciju brojeva 9 i –4:

$$9 = 2 \cdot 4 + 1 \;\Rightarrow\; 1 = 9 - 2 \cdot 4$$

$$4 = 4 \cdot \underline{1} + 0$$

Dakle, imamo NZD$(9, -4) = 1 \cdot 9 + 2 \cdot (-4)$. Odavde slijedi da je opće rješenje jednačine u skupu $\mathbb{Z}$ dato kao

$$x = 1 \cdot 3 - 4t = 3 - 4t, \quad y = 2 \cdot 3 - 9t = 6 - 9t, \quad t \in \mathbb{Z} \text{ (proizvoljno)}$$

Da bi rješenja bila iz skupa $\mathbb{N}$, mora biti $x > 0$ i $y > 0$, odnosno $3 - 4t > 0$ i $6 - 9t > 0$, iz čega slijedi $t < 3/4 = 0.75$ i $t < 2/3 \approx 0.67$. S obzirom da je t cijeli broj, slijedi da t može biti bilo koji cijeli broj za koji vrijedi $t \le 0$. Drugim riječima, opće rješenje jednačine u skupu $\mathbb{N}$ dato je kao

$$x = 3 - 4t, \quad y = 6 - 9t, \quad t \in \mathbb{Z} \wedge t \le 0$$

Uz smjenu $t \to 1 - t$, ovo rješenje se može praktičnije zapisati i na sljedeći način:

$$x = -1 + 4t, \quad y = -3 + 9t, \quad t \in \mathbb{N}$$

Ovaj primjer pokazuje da linearne Diofantove mogu imati beskonačno mnogo rješenja čak i u skupu prirodnih brojeva.

Ilustrativno je provesti i postupak rješavanja ove jednačine na drugi način. Ukoliko jednačinu $9x - 4y = 3$ riješimo po y dobijamo:

$$y = \frac{9x-3}{4} = 2x + \frac{x-3}{4}$$

Da bi y bio cijeli broj, izraz $x-3$ mora biti djeljiv sa 4, odnosno mora biti $x = 3+4n$, gdje je n proizvoljan cijeli broj. Stoga je

$$y = \frac{9x-3}{4} = \frac{9(3+4n)-3}{4} = 6+9n$$

Da bi rješenja bila prirodni brojevi, mora biti $3+4n>0$ i $6+9n>0$, odnosno $n>-3/4=-0.75$ i $n>-2/3\approx-0.67$. Zbog cjelobrojnosti n, ovi uvjeti se svode na $n\geq 0$, tako da je opće rješenje u skupu prirodnih brojeva

$$x = 3+4n, \quad y = 6+9n, \quad t\in \mathbb{N}\cup\{0\}$$

Smjenom $n\rightarrow t-1$ ovo rješenje dobija isti oblik koji smo već ranije dobili.

d) Jednačina je rješiva (u skupu $\mathbb{Z}$), jer je NZD$(2,5)=1$, i $1\,|\,4$. Sada treba izraziti NZD$(2,5)$ kao linearnu kombinaciju brojeva 2 i 5:

$$5 = 2\cdot 2+1 \;\Rightarrow\; 1 = 5-2\cdot 2$$
$$2 = 2\cdot \underline{1}+0$$

Dakle, imamo NZD$(2,5)=(-2)\cdot 2+1\cdot 5$. Stoga je opće rješenje jednačine u skupu $\mathbb{Z}$ dato kao

$$x = (-2)\cdot 4+5t = -8+5t, \quad y = 1\cdot 4-2t = 4-2t, \quad t\in\mathbb{Z} \text{ (proizvoljno)}$$

Da bi rješenja pripadala skupu $\mathbb{N}$, mora biti $x>0$ i $y>0$, odnosno $-8+5t>0$ i $4-2t>0$, iz čega slijedi $t>8/5=1.6$ i $t<2$. Ove dvije nejednakosti nisu istovremeno zadovoljive niti za jednu vrijednost t iz skupa cijelih brojeva, tako da tražena jednačina nema rješenja u skupu $\mathbb{N}$. Ovo je zapravo prilično očigledno iz same jednačine. Naime, izraz $2x+5y$ za vrijednosti x i y iz skupa $\mathbb{N}$ najmanju vrijednost uzima za $x=y=1$ i ta vrijednost iznosi 7, tako da je $2x+5y\geq 7$ za sve vrijednosti x i y iz skupa $\mathbb{N}$, pa je samim tim za takve vrijednosti x i y nemoguće da bude $2x+5y=7$. Ovaj primjer pokazuje da linearne Diofantove jednačine mogu da ne budu rješive u skupu $\mathbb{N}$ iako su rješive u skupu $\mathbb{Z}$.

Drugi put za rješavanje ove jednačine je sljedeći. Riješimo prvo jednačinu $2x+5y=4$ po x:

$$x = \frac{4-5y}{2} = 2-2y+\frac{y}{2}$$

Da bi x bio cijeli broj, y mora biti djeljiv sa 2, odnosno mora biti $y=2n$, gdje je n proizvoljan cijeli broj. Stoga je

$$x = \frac{4-5y}{2} = \frac{4-5\cdot 2n}{2} = 2-5n$$

Dakle, opće rješenje u skupu $\mathbb{Z}$ može se predstaviti i kao $x=2-5n$, $y=2n$ gdje je n proizvoljan cijeli broj (usput, ovo je ujedno i kanonski oblik rješenja). Uvjeti $x>0$ i $y>0$ daju $2-5n>0$ i $2n>0$, odnosno $n<2/5=0.4$ i $n>0$. Jasno je da ove nejednakosti nije moguće istovremeno zadovoljiti ni za jednu cjelobrojnu vrijednost n, što je još jedan pokazatelj da ova jednačina nema rješenja u skupu prirodnih brojeva.