a) Jednačina je rješiva, jer je $\mathrm{NZD}(14, 38) = 2$ i $2 \mid 100$. Nakon dijeljenja sa 2, jednačina postaje $7x + 19y = 50$, pri čemu je $\mathrm{NZD}(7, 19) = 1$. Sada treba $\mathrm{NZD}(7, 19)$ izraziti kao linearnu kombinaciju brojeva 7 i 19:

$$19 = 2 \cdot 7 + 5 \;\Rightarrow\; 5 = 19 - 2 \cdot 7$$
$$7 = 1 \cdot 5 + 2 \;\Rightarrow\; 2 = 7 - 5 = 7 - (19 - 2 \cdot 7) = 3 \cdot 7 - 19$$
$$5 = 2 \cdot 2 + 1 \;\Rightarrow\; 1 = 5 - 2 \cdot 2 = (19 - 2 \cdot 7) - 2 \cdot (3 \cdot 7 - 19) = 3 \cdot 19 - 8 \cdot 7$$
$$2 = 2 \cdot \underline{1} + 0$$

Dakle, imamo rastavu $1 = -8 \cdot 7 + 3 \cdot 19$. Stoga je jedno rješenje dato kao

$$x_0 = -8 \cdot 50 = -400, \quad y_0 = 3 \cdot 50 = 150$$

dok se sva rješenja mogu izraziti u obliku

$$x = x_0 + 19\,t = -400 + 19\,t, \quad y = y_0 - 7\,t = 150 - 7\,t, \quad t \in \mathbb{Z} \text{ (proizvoljno)}$$

Potražimo i minimalno rješenje ove jednačine, tj. rješenje za koje je $|x| + |y|$ minimalno. Za tu svrhu, potrebno je pronaći $t \in \mathbb{Z}$ takvo da izraz

$$|-400 + 19\,t| + |150 - 7\,t|$$

dobije minimalnu vrijednost. Nije teško vidjeti da se to postiže za $t = 21$, tako da minimalno rješenje glasi:

$$x_{min} = -1, \quad y_{min} = 3$$

Opće rješenje jednačine možemo izraziti i preko minimalnog rješenja (tzv. kanonski oblik rješenja), što ima za prednost da se koriste manji brojevi:

$$x = -1 + 19\,t, \quad y = 3 - 7\,t, \quad t \in \mathbb{Z} \text{ (proizvoljno)}$$

Radi ilustracije, ista jednačina će biti riješena i na drugi (elememtarniji) način, koji se ne oslanja na Euklidov algoritam. Ukoliko jednačinu $7x + 19y = 50$ riješimo po x dobijamo:

$$x = \frac{50 - 19y}{7} = 7 - 2y + \frac{1 - 5y}{7}$$

Da bi x bio cijeli broj, izraz $1 - 5y$ mora biti djeljiv sa 7, odnosno mora biti $1 - 5y = 7n$, gdje je n proizvoljan cijeli broj. Ovo dovodi do Diofantove jednačine $5y + 7n = 1$, pri čemu su sada nepoznate y i n. Nastavićemo dalje isti postupak, pri čemu ćemo pojedine detalje prikazivati u sažetijoj formi:

$$5y + 7n = 1 \;\Rightarrow\; y = \frac{1 - 7n}{5} = -n + \frac{1 - 2n}{5}$$
$$y \in \mathbb{Z} \;\Rightarrow\; 5 \mid (1 - 2n) \;\Rightarrow\; 1 - 2n = 5m \; (m \in \mathbb{Z}) \;\Rightarrow\; 2n + 5m = 1 \;\Rightarrow\; n = \frac{1 - 5m}{2} = -2m + \frac{1 - m}{2}$$
$$n \in \mathbb{Z} \;\Rightarrow\; 2 \mid (1 - m) \;\Rightarrow\; 1 - m = 2p \; (p \in \mathbb{Z}) \;\Rightarrow\; m = 1 - 2p \; (p \in \mathbb{Z})$$

Dakle, imamo $m = 1 - 2p$, pri čemu je p proizvoljan cijeli broj. Do rješenja za x i y sada dolazimo uvrštavanjem unazad:

$$n = \frac{1-5m}{2} = \frac{1-5(1-2p)}{2} = -2+5p$$
$$y = \frac{1-7n}{5} = \frac{1-7(-2+5p)}{5} = 3-7p$$
$$x = \frac{50-19y}{7} = \frac{50-19(3-7p)}{7} = -1+19p$$

U ovom primjeru je na ovaj način odmah dobijeno rješenje u kanonskom obliku. Međutim, vidljivo je da je postupak zasnovan na Euklidovom algoritmu praktičniji.

b) Jednačina je rješiva, jer je $\mathrm{NZD}(13, 21) = 1$, i $1 \mid 15$. Prelazimo odmah na izražavanje $\mathrm{NZD}(13, 21)$ kao linearne kombinacije brojeva 13 i 21:

$$21 = 1 \cdot 13 + 8 \;\Rightarrow\; 8 = 21 - 13$$
$$13 = 1 \cdot 8 + 5 \;\Rightarrow\; 5 = 13 - 8 = 13 - (21 - 13) = 2 \cdot 13 - 21$$
$$8 = 1 \cdot 5 + 3 \;\Rightarrow\; 3 = 8 - 5 = (21 - 13) - (2 \cdot 13 - 21) = 2 \cdot 21 - 3 \cdot 13$$
$$5 = 1 \cdot 3 + 2 \;\Rightarrow\; 2 = 5 - 3 = (2 \cdot 13 - 21) - (2 \cdot 21 - 3 \cdot 13) = 5 \cdot 13 - 3 \cdot 21$$
$$3 = 1 \cdot 2 + 1 \;\Rightarrow\; 1 = 3 - 2 = (2 \cdot 21 - 3 \cdot 13) - (5 \cdot 13 - 3 \cdot 21) = 5 \cdot 21 - 8 \cdot 13$$
$$2 = \underline{2} \cdot 1 + 0$$

Dakle, imamo rastavu $1 = -8 \cdot 13 + 5 \cdot 21$. Stoga je jedno rješenje

$$x_0 = -8 \cdot 15 = -120, \quad y_0 = 5 \cdot 15 = 75$$

dok su sva rješenja data kao

$$x = x_0 + 21t = -120 + 21t, \quad y = y_0 - 13t = 75 - 13t, \quad t \in \mathbb{Z} \text{ (proizvoljno)}$$

Nađimo još i minimalno rješenje ove jednačine, tj. rješenje za koje je $|x| + |y|$ minimalno. Za tu svrhu, nađimo $t \in \mathbb{Z}$ za koje je izraz

$$|-120 + 21t| + |75 - 13t|$$

minimalan. To se postiže za $t = 6$, tako da minimalno rješenje glasi:

$$x_{min} = 6, \quad y_{min} = -3$$

Na osnovu ovog minimalnog rješenja, dobijamo i opće rješenje u izraženo kanonskom obliku:

$$x = 6 + 21t, \quad y = -3 - 13t, \quad t \in \mathbb{Z} \text{ (proizvoljno)}$$

Riješimo i ovu jednačinu na drugi način, bez upotrebe Euklidovog algoritma. Izrazimo li x iz jednačine $13x + 21y = 15$ preko y, dobijamo:

$$x = \frac{15 - 21y}{13} = 1 - y + \frac{2 - 8y}{13}$$

Da bi x bio cijeli broj, izraz $2 - 8y$ mora biti djeljiv sa 13, odnosno mora biti $2 - 8y = 13n$, gdje je n proizvoljan cijeli broj. Ovo dovodi do Diofantove jednačine $8y + 13n = 2$, pri čemu su sada nepoznate y i n. Dalje postupak ide ovako:

$$8y + 13n = 2 \;\Rightarrow\; y = \frac{2-13n}{8} = -n + \frac{2-5n}{8}$$

$$y \in \mathbb{Z} \;\Rightarrow\; 8\,|\,(2-5n) \;\Rightarrow\; 2-5n = 8m\ (m \in \mathbb{Z}) \;\Rightarrow\; 5n + 8m = 2 \;\Rightarrow\; n = \frac{2-8m}{5} = -m + \frac{2-3m}{5}$$

$$n \in \mathbb{Z} \;\Rightarrow\; 5\,|\,(2-3m) \;\Rightarrow\; 2-3m = 5p\ (p \in \mathbb{Z}) \;\Rightarrow\; 3m + 5p = 2 \;\Rightarrow\; m = \frac{2-5p}{3} = -p + \frac{2-2p}{3}$$

$$m \in \mathbb{Z} \;\Rightarrow\; 3\,|\,(2-2p) \;\Rightarrow\; 2-2p = 3q\ (q \in \mathbb{Z}) \;\Rightarrow\; 2p + 3q = 2 \;\Rightarrow\; p = \frac{2-3q}{2} = -q + \frac{2-q}{2}$$

$$p \in \mathbb{Z} \;\Rightarrow\; 2\,|\,(2-q) \;\Rightarrow\; 2-q = 2r\ (r \in \mathbb{Z}) \;\Rightarrow\; q = 2-2r\ (r \in \mathbb{Z})$$

Dakle, imamo $q = 2 - 2r$, gdje je r proizvoljan cijeli broj. Sada ćemo primijeniti razmotavanje unazad da dođemo do rješenja:

$$p = \frac{2-3q}{2} = \frac{2-3(2-2r)}{2} = -2 + 3r$$

$$m = \frac{2-5p}{3} = \frac{2-5(-2+3r)}{3} = 4 - 5r$$

$$n = \frac{2-8m}{5} = \frac{2-8(4-5r)}{5} = -6 + 8r$$

$$y = \frac{2-13n}{8} = \frac{2-13(-6+8r)}{8} = 10 - 13r$$

$$x = \frac{15-21y}{13} = \frac{15-21(10-13r)}{13} = -15 + 21r$$

Dakle, došli smo do rješenja $x = -15 + 21r$ i $y = 10 - 13r$ gdje je r proizvoljan cijeli broj. Ovo rješenje niti je u kanonskom obliku, niti u obliku koji je dobijen primjenom Euklidovog algoritma. Međutim, jasno je da su ova rješenja ekvivalentna, odnosno da generiraju isti skup rješenja. Zaista, dobijeno rješenje se smjenom $r \to t - 5$ svodi na oblik rješenja koji je dobijen primjenom Euklidovog algoritma, dok se smjenom $r \to t + 1$ svodi na kanonski oblik. Ipak, u svakom slučaju je primijetno da je rješavanje uz pomoć Euklidovog algoritma mnogo praktičnije od alternativnog načina rješavanja, jer se pri načinu rješavanja koji ne koristi Euklidov algoritam javlja potreba za uvođenjem većeg broja pomoćnih promjenljivih.

c) Jednačina nije rješiva, jer je $\mathrm{NZD}(3, 27) = 3$, a 3 nije djelilac od 1. Zaista, lijeva strana jednačine $3x + 27y$ se može napisati u obliku $3\,(x + 9y)$ iz čega vidimo da je ona djeljiva sa 3 za ma kakve cjelobrojne vrijednosti x i y, te nikako ne može biti jednaka jedinici ni za kakve cjelobrojne vrijednosti x i y. Također, riješimo li jednačinu $3x + 27y = 1$ po x, dobijamo

$$x = \frac{1-27y}{3} = -9y + \frac{1}{3}$$

iz čega se odmah vidi da kad god je y cijeli broj, x ne može biti cijeli broj, tako da rješenja kod kojih su i x i y istovremeno cjelobrojni ne postoje.