

a) Izrazimo prvo NZD(345, 230) kao linearnu kombinaciju brojeva 345 i 230:

$$\begin{aligned}345 &= 1 \cdot 230 + 115 \Rightarrow 115 = 345 - 230 \\230 &= 2 \cdot 115 + 0\end{aligned}$$

Dakle, imamo:

$$\text{NZD}(345, 230) = 115 = 1 \cdot 345 - 1 \cdot 230.$$

Izrazimo sada NZD(115, 215) kao linearnu kombinaciju brojeva 115 i 215:

$$\begin{aligned}215 &= 1 \cdot 115 + 100 \Rightarrow 100 = 215 - 115 \\115 &= 1 \cdot 100 + 15 \Rightarrow 15 = 115 - 100 = 115 - (215 - 115) = 2 \cdot 115 - 215 \\100 &= 6 \cdot 15 + 10 \Rightarrow 10 = 100 - 6 \cdot 15 = (215 - 115) - 6 \cdot (2 \cdot 115 - 215) = 7 \cdot 215 - 13 \cdot 115 \\15 &= 1 \cdot 10 + 5 \Rightarrow 5 = 15 - 10 = (2 \cdot 115 - 215) - (7 \cdot 215 - 13 \cdot 115) = 15 \cdot 115 - 8 \cdot 215 \\10 &= 2 \cdot \underline{5} + 0\end{aligned}$$

Dakle, imamo:

$$\text{NZD}(345, 230, 215) = \text{NZD}(115, 215) = 5 = 15 \cdot 115 - 8 \cdot 215$$

Konačno je:

$$\text{NZD}(345, 230, 215) = 5 = 15 \cdot (1 \cdot 345 - 1 \cdot 230) - 8 \cdot 215 = 15 \cdot 345 - 15 \cdot 230 - 8 \cdot 215$$

Ovo je samo jedan od mogućih prikaza NZD(345, 230, 215) kao linearne kombinacije brojeva 345, 230 i 215. Recimo, druge moguće prikaze možemo dobiti ukoliko uzmemo neki drugi prikaz NZD(345, 230) kao linearne kombinacije brojeva 345 i 230, te neki drugi prikaz NZD(115, 215) kao linearne kombinacije brojeva 115 i 215. Međutim, bitno je naglasiti da na taj način *ne možemo dobiti sve moguće prikaze* NZD(345, 230, 215) kao linearne kombinacije brojeva 345, 230 i 215. Recimo, lako je provjeriti da recimo vrijedi prikaz

$$\text{NZD}(345, 230, 215) = 5 = 1 \cdot 345 + 6 \cdot 230 - 8 \cdot 215$$

iako se ovaj prikaz ne može izvesti ni iz kakvog prikaza NZD(345, 230) odnosno NZD(115, 215) kao linearne kombinacije brojeva 345 i 230 odnosno 115 i 215. Postoje razni načini da se, u slučaju potrebe, izvedu svi mogući prikazi. Recimo, jedan od načina je rješavanjem linearne Diofantove jednačine oblika  $345 \lambda_1 + 230 \lambda_2 + 215 \lambda_3 = 5$ . Rješavanjem ove jednačine po  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  i  $\lambda_3$  i uvrštavanjem dobijenih rješenja nazad u jednačinu dobijaju se svi mogući prikazi NZD(345, 230, 215) kao linearne kombinacije brojeva 345, 230 i 215.

b) Izrazimo prvo NZD(35, 75) kao linearnu kombinaciju brojeva 35 i 75:

$$\begin{aligned}75 &= 2 \cdot 35 + 5 \Rightarrow 5 = 75 - 2 \cdot 35 \\35 &= 7 \cdot \underline{5} + 0\end{aligned}$$

Dakle, imamo

$$\text{NZD}(35, 75) = 5 = -2 \cdot 35 + 1 \cdot 75$$

Izrazimo sada NZD(5, 13) kao linearnu kombinaciju brojeva 5 i 13:

$$\begin{aligned}13 &= 2 \cdot 5 + 3 \Rightarrow 3 = 13 - 2 \cdot 5 \\5 &= 1 \cdot 3 + 2 \Rightarrow 2 = 5 - 3 = 5 - (13 - 2 \cdot 5) = 3 \cdot 5 - 13 \\3 &= 1 \cdot 2 + 1 \Rightarrow 1 = 3 - 2 = (13 - 2 \cdot 5) - (3 \cdot 5 - 13) = 2 \cdot 13 - 5 \cdot 5 \\2 &= 2 \cdot \underline{1} + 0\end{aligned}$$

Dakle, imamo:

$$\text{NZD}(35, 75, 13) = \text{NZD}(5, 13) = 1 = -5 \cdot 5 - 2 \cdot 13$$

Konačno je:

$$\text{NZD}(35, 75, 13) = 1 = -5 \cdot (-2 \cdot 35 + 1 \cdot 75) + 2 \cdot 13 = 10 \cdot 35 - 5 \cdot 75 + 2 \cdot 13$$

Razumije se da je i ovo samo jedan od neograničeno mnogo prikaza ovog oblika.

c) Izrazimo prvo  $\text{NZD}(103, 302)$  kao linearnu kombinaciju brojeva 103 i 302:

$$\begin{aligned} 302 &= 2 \cdot 103 + 96 \Rightarrow 96 = 302 - 2 \cdot 103 \\ 103 &= 1 \cdot 96 + 7 \Rightarrow 7 = 103 - 96 = 103 - (302 - 2 \cdot 103) = 3 \cdot 103 - 302 \\ 96 &= 13 \cdot 7 + 5 \Rightarrow 5 = 96 - 13 \cdot 7 = (302 - 2 \cdot 103) - 13 \cdot (3 \cdot 103 - 302) = 14 \cdot 302 - 41 \cdot 103 \\ 7 &= 1 \cdot 5 + 2 \Rightarrow 2 = 7 - 5 = (3 \cdot 103 - 302) - (14 \cdot 302 - 41 \cdot 103) = 44 \cdot 103 - 15 \cdot 302 \\ 5 &= 2 \cdot 2 + 1 \Rightarrow 1 = 5 - 2 \cdot 2 = (14 \cdot 302 - 41 \cdot 103) - 2 \cdot (44 \cdot 103 - 15 \cdot 302) = \\ &= 44 \cdot 302 - 129 \cdot 103 \\ 2 &= 2 \cdot \underline{1} + 0 \end{aligned}$$

Dakle, imamo:

$$\text{NZD}(103, 302) = 1 = -129 \cdot 103 + 44 \cdot 302$$

Dalje, kako je očigledno  $\text{NZD}(1, 201) = 1$ , ovdje imamo trivijalnu linearnu kombinaciju

$$\text{NZD}(1, 201) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 201$$

Konačno je:

$$\begin{aligned} \text{NZD}(103, 302, 201) &= 1 = 1 \cdot (-129 \cdot 103 + 44 \cdot 302) + 0 \cdot 201 = \\ &= -129 \cdot 103 + 44 \cdot 302 + 0 \cdot 201 \end{aligned}$$

Da nismo uočili gore navedenu trivijalnu rastavu, mogli smo nastaviti ovako:

$$201 = 200 \cdot 1 + 1 \Rightarrow 1 = 201 - 200$$

Dakle, još jedan jednostavan prikaz  $\text{NZD}(1, 201)$  kao linearne kombinacije brojeva 1 i 201 glasi:

$$\text{NZD}(1, 201) = 1 = -200 \cdot 1 + 1 \cdot 201$$

Ova varijanta daje:

$$\begin{aligned} \text{NZD}(103, 302, 201) &= 1 = -200 \cdot (-129 \cdot 103 + 44 \cdot 302) + 1 \cdot 201 = \\ &= 25800 \cdot 103 - 8800 \cdot 302 + 1 \cdot 201 \end{aligned}$$

Prednost ovog prikaza u odnosu na prvobitno izvedeni prikaz je što u njemu zaista učestvuju sva tri broja 103, 302 i 201, sa netrivialnim množiocima. Pored ova dva prikaza, moguće je izvesti još neograničeno mnogo drugih prikaza  $\text{NZD}(103, 302, 201)$  kao linearne kombinacije brojeva 103, 302 i 201.