

Uvedimo sljedeće predikate:

$P(x)$  –  $x$  je student koji je odabrao diskretnu matematiku kao izborni predmet

$Q(x)$  –  $x$  je oblast matematike

$R(x, y)$  –  $x$  voli  $y$

$S(x)$  –  $x$  je student koji je položio diskretnu matematiku

Hipoteza “Svi studenti koji su odabrali diskretnu matematiku kao izborni predmet vole neke oblasti matematike” može se zapisati kao

$$\forall x (P(x) \Rightarrow \exists y (Q(y) \wedge R(x, y)))$$

Hipoteza “Barem jedan student koji je odabrao diskretnu matematiku kao izborni predmet nije položio inženjersku matematiku” može se zapisati kao:

$$\exists x (P(x) \wedge \neg S(x))$$

Zaključak “Nije istina da svi studenti koji nisu položili inženjersku matematiku ne vole niti jednu oblast matematike” može se zapisati kao:

$$\neg \forall x (\neg S(x) \Rightarrow \forall y (Q(y) \Rightarrow \neg R(x, y)))$$

Slijedi da traženo rezonovanje možemo zapisati u obliku

$$\forall x (P(x) \Rightarrow \exists y (Q(y) \wedge R(x, y))), \exists x (P(x) \wedge \neg S(x)) \not\models \neg \forall x (\neg S(x) \Rightarrow \forall y (Q(y) \Rightarrow \neg R(x, y)))$$

odnosno, treba pokazati valjanost izraza

$$\forall x (P(x) \Rightarrow \exists y (Q(y) \wedge R(x, y))) \wedge \exists x (P(x) \wedge \neg S(x)) \Rightarrow \neg \forall x (\neg S(x) \Rightarrow \forall y (Q(y) \Rightarrow \neg R(x, y)))$$

Ovaj je izraz valjan ukoliko je kontradiktorna njegova negacija koja glasi:

$$\forall x (P(x) \Rightarrow \exists y (Q(y) \wedge R(x, y))) \wedge \exists x (P(x) \wedge \neg S(x)) \wedge \forall x (\neg S(x) \Rightarrow \forall y (Q(y) \Rightarrow \neg R(x, y)))$$

Dobijeni izraz ima oblik  $F_1 \wedge F_2 \wedge F_3$ . Svedimo klauze  $F_1 - F_3$  na preneks normalnu formu:

$$\begin{aligned} F_1 &= \forall x (P(x) \Rightarrow \exists y (Q(y) \wedge R(x, y))) = \forall x (\neg P(x) \vee \exists y (Q(y) \wedge R(x, y))) = \\ &= \forall x \exists y (\neg P(x) \vee (Q(y) \wedge R(x, y))) \end{aligned}$$

$$F_2 = \exists x (P(x) \wedge \neg S(x))$$

$$\begin{aligned} F_3 &= \forall x (\neg S(x) \Rightarrow \forall y (Q(y) \Rightarrow \neg R(x, y))) = \forall x (S(x) \vee \forall y (\neg Q(y) \vee \neg R(x, y))) = \\ &= \forall x \forall y (S(x) \vee \neg Q(y) \vee \neg R(x, y)) \end{aligned}$$

Potražimo sada odbijenicu za skup klauza  $F_1 - F_3$ :

(1)	$\exists x (P(x) \wedge \neg S(x))$	(F <sub>2</sub> )
(2)	$P(a) \wedge \neg S(a)$	(EI iz (1) uz $x \rightarrow a$ )
(3)	$\forall x \exists y (\neg P(x) \vee (Q(y) \wedge R(x, y)))$	(F <sub>1</sub> )
(4)	$\exists y (\neg P(a) \vee (Q(y) \wedge R(a, y)))$	(UI iz (3) uz $x \rightarrow a$ )
(5)	$\neg P(a) \vee (Q(b) \wedge R(a, b))$	(EI iz (4) uz $y \rightarrow b$ )
(6)	$\forall x \forall y (S(x) \vee \neg Q(y) \vee \neg R(x, y))$	(F <sub>3</sub> )
(7)	$\forall y (S(a) \vee \neg Q(y) \vee \neg R(a, y))$	(UI iz (6) uz $x \rightarrow a$ )
(8)	$S(a) \vee \neg Q(b) \vee \neg R(a, b)$	(UI iz (7) uz $y \rightarrow b$ )
(9)	$P(a)$	(logička posljedica (2))
(10)	$\neg S(a)$	(logička posljedica (2))
(11)	$Q(b) \wedge R(a, b)$	(rezolucija (5) i (9))
(12)	$\neg Q(b) \vee \neg R(a, b)$	(rezolucija (8) i (10))

(11) i (12) su kontradiktorni, jer su negacija jedan drugog. Ukoliko to odmah ne primijetimo, možemo dalje izvući  $Q(b)$  i  $R(a, b)$  kao logičke posljedice (11), nakon čega rezolucija (12) i  $Q(b)$  daje  $\neg R(a, b)$ , što je u direktnoj kontradikciji sa  $R(a, b)$ .

Napomena: Razumije se da prikazano rješenje nije i jedino moguće. Na primjer, moguće je uvesti dva posebna predikata sa značenjem “ $x$  je student” i “ $x$  je odabrao diskretnu matematiku kao izborni predmet” umjesto kompozitnog predikata “ $x$  je student koji je odabrao diskretnu matematiku kao izborni predmet”. Međutim, uvođenje kompozitnog predikata je ovdje posve logično, s obzirom da samo studenti (a ne recimo zidari) biraju izborne predmete.