Zadatak će biti riješen na dva načina, kao ilustracija različitih načina modeliranja istih izjava izrazima predikatske logike.

Prvi način:

Uvedimo sljedeće predikate:

P(x) – x je navijač FK Sarajevo
Q(x) – x voli crvenu boju
R(x) – x je navijač FK Željezničar
S(x, y) – x voli y

Hipoteza "Svi navijači FK Sarajevo vole crvenu boju" može se iskazati u obliku:

$$\forall x\,(\mathrm{P}(x) \Rightarrow \mathrm{Q}(x))$$

Hipoteza "Neki navijači FK Sarajevo ne vole niti jednog navijača FK Željezničar" može se iskazati u obliku:

$$\exists x\,(\mathrm{P}(x) \wedge \forall y\,(\mathrm{R}(y) \Rightarrow \neg \mathrm{S}(x,y)))$$

Zaključak "Za svakog navijača FK Željezničar postoji neka osoba koja ga ne voli, a koja voli crvenu boju" možemo zapisati u obliku:

$$\forall x\,(\mathrm{R}(x) \Rightarrow \exists y\,(\neg \mathrm{S}(y,x) \wedge \mathrm{Q}(y)))$$

Čitavo rezonovanje stoga možemo zapisati u obliku:

$$\forall x\,(\mathrm{P}(x) \Rightarrow \mathrm{Q}(x)), \exists x\,(\mathrm{P}(x) \wedge \forall y\,(\mathrm{R}(y) \Rightarrow \neg \mathrm{S}(x,y))) \models \forall x\,(\mathrm{R}(x) \Rightarrow \exists y\,(\neg \mathrm{S}(y,x) \wedge \mathrm{Q}(y)))$$

Odnosno, sljedeći izraz mora biti valjan:

$$\forall x\,(\mathrm{P}(x) \Rightarrow \mathrm{Q}(x)) \wedge \exists x\,(\mathrm{P}(x) \wedge \forall y\,(\mathrm{R}(y) \Rightarrow \neg \mathrm{S}(x,y))) \Rightarrow \forall x\,(\mathrm{R}(x) \Rightarrow \exists y\,(\neg \mathrm{S}(y,x) \wedge \mathrm{Q}(y)))$$

Ovaj izraz je valjan ako je njegova negacija kontradiktorna, a ova negacija glasi:

$$\forall x\,(\mathrm{P}(x) \Rightarrow \mathrm{Q}(x)) \wedge \exists x\,(\mathrm{P}(x) \wedge \forall y\,(\mathrm{R}(y) \Rightarrow \neg \mathrm{S}(x,y))) \wedge \neg \forall x\,(\mathrm{R}(x) \Rightarrow \exists y\,(\neg \mathrm{S}(y,x) \wedge \mathrm{Q}(y)))$$

Posljednji izraz ima oblik $\mathrm{F}_1 \wedge \mathrm{F}_2 \wedge \mathrm{F}_3$. Pretvorimo sada klauze F_1, F_2 i F_3 u preneks normalnu formu uz oslobađanje od implikacija:

$$\mathrm{F}_1 = \forall x\,(\mathrm{P}(x) \Rightarrow \mathrm{Q}(x)) = \forall x\,(\neg \mathrm{P}(x) \vee \mathrm{Q}(x))$$

$$\begin{gathered}\mathrm{F}_2 = \exists x\,(\mathrm{P}(x) \wedge \forall y\,(\mathrm{R}(y) \Rightarrow \neg \mathrm{S}(x,y))) = \exists x\,(\mathrm{P}(x) \wedge \forall y\,(\neg \mathrm{R}(y) \vee \neg \mathrm{S}(x,y))) = \\ = \exists x\,\forall y\,(\mathrm{P}(x) \wedge (\neg \mathrm{R}(y) \vee \neg \mathrm{S}(x,y)))\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\mathrm{F}_3 = \neg \forall x\,(\mathrm{R}(x) \Rightarrow \exists y\,(\neg \mathrm{S}(y,x) \wedge \mathrm{Q}(y))) = \exists x\,\neg(\mathrm{R}(x) \Rightarrow \exists y\,(\neg \mathrm{S}(y,x) \wedge \mathrm{Q}(y))) = \\ = \exists x\,\neg(\neg \mathrm{R}(x) \vee \exists y\,(\neg \mathrm{S}(y,x) \wedge \mathrm{Q}(y))) = \exists x\,(\mathrm{R}(x) \wedge \neg \exists y\,(\neg \mathrm{S}(y,x) \wedge \mathrm{Q}(y))) = \\ = \exists x\,(\mathrm{R}(x) \wedge \forall y\,\neg(\neg \mathrm{S}(y,x) \wedge \mathrm{Q}(y))) = \exists x\,(\mathrm{R}(x) \wedge \forall y\,(\mathrm{S}(y,x) \vee \neg \mathrm{Q}(y))) = \\ = \exists x\,\forall y\,(\mathrm{R}(x) \wedge (\mathrm{S}(y,x) \vee \neg \mathrm{Q}(y)))\end{gathered}$$

Potražimo sada odbijenicu za ovaj skup klauza:

(1)	$\exists x\,\forall y\,(\mathrm{P}(x)\wedge(\neg\mathrm{R}(y)\vee\neg\mathrm{S}(x,y)))$	(F_2)
(2)	$\forall y\,(\mathrm{P}(a)\wedge(\neg\mathrm{R}(y)\vee\neg\mathrm{S}(a,y)))$	(EI iz (1) uz $x\to a$)
(3)	$\exists x\,\forall y\,(\mathrm{R}(x)\wedge(\mathrm{S}(y,x)\vee\neg\mathrm{Q}(y)))$	(F_3)
(4)	$\forall y\,(\mathrm{R}(b)\wedge(\mathrm{S}(y,b)\vee\neg\mathrm{Q}(y)))$	(EI iz (3) uz $x\to b$)
(5)	$\mathrm{P}(a)\wedge(\neg\mathrm{R}(b)\vee\neg\mathrm{S}(a,b))$	(UI iz (2) uz $x\to b$)
(6)	$\mathrm{R}(b)\wedge(\mathrm{S}(a,b)\vee\neg\mathrm{Q}(a))$	(UI iz (4) uz $y\to a$)
(7)	$\forall x\,(\neg\mathrm{P}(x)\vee\mathrm{Q}(x))$	(F_1)
(8)	$\neg\mathrm{P}(a)\vee\mathrm{Q}(a)$	(UI iz (7) uz $x\to a$)
(9)	$\mathrm{P}(a)$	(logička posljedica (5))
(10)	$\mathrm{Q}(a)$	(rezolucija iz (8) i (9))
(11)	$\mathrm{S}(a,b)\vee\neg\mathrm{Q}(a)$	(logička posljedica (6))
(12)	$\mathrm{S}(a,b)$	(rezolucija iz (10) i (11))
(13)	$\neg\mathrm{R}(b)\vee\neg\mathrm{S}(a,b)$	(logička posljedica (5))
(14)	$\neg\mathrm{R}(b)$	(rezolucija iz (12) i (13))
(15)	$\mathrm{R}(b)$	(logička posljedica (6))

(14) i (15) su kontradiktorni, te formiraju traženu odbijenicu. Dakle, negacija polaznog izraza je kontradiktorna, te je polazni izraz valjan, što je i trebalo pokazati.

Drugi način:

Uvedimo konstantu *c* koja predstavlja crvenu boju i sljedeće predikate:

P(x) – x je navijač FK Sarajevo
Q(x) – x je navijač FK Željezničar
R(x, y) – x voli y

Hipoteza "Svi navijači FK Sarajevo vole crvenu boju" može se iskazati u obliku:

$$\forall x\,(\mathrm{P}(x)\Rightarrow\mathrm{R}(x,c))$$

Hipoteza "Neki navijači FK Sarajevo ne vole niti jednog navijača FK Željezničar" može se iskazati u obliku:

$$\exists x\,(\mathrm{P}(x)\wedge\forall y\,(\mathrm{Q}(y)\Rightarrow\neg\mathrm{R}(x,y)))$$

Zaključak "Za svakog navijača FK Željezničar postoji neka osoba koja ga ne voli, a koja voli crvenu boju" možemo zapisati u obliku:

$$\forall x\,(\mathrm{Q}(x)\Rightarrow\exists y\,(\neg\mathrm{R}(y,x)\wedge\mathrm{R}(y,c)))$$

Čitavo rezonovanje stoga možemo zapisati u obliku:

$$\forall x\,(\mathrm{P}(x)\Rightarrow\mathrm{R}(x,c)),\ \exists x\,(\mathrm{P}(x)\wedge\forall y\,(\mathrm{Q}(y)\Rightarrow\neg\mathrm{R}(x,y)))\models\forall x\,(\mathrm{Q}(x)\Rightarrow\exists y\,(\neg\mathrm{R}(y,x)\wedge\mathrm{R}(y,c)))$$

Odnosno, sljedeći izraz mora biti valjan:

$$\forall x\,(\mathrm{P}(x)\Rightarrow\mathrm{R}(x,c))\wedge\exists x\,(\mathrm{P}(x)\wedge\forall y\,(\mathrm{Q}(y)\Rightarrow\neg\mathrm{R}(x,y)))\Rightarrow\forall x\,(\mathrm{Q}(x)\Rightarrow\exists y\,(\neg\mathrm{R}(y,x)\wedge\mathrm{R}(y,c)))$$

Ovaj izraz je valjan ako je njegova negacija kontradiktorna, a ova negacija glasi:

$$\forall x\,(\mathrm{P}(x)\Rightarrow\mathrm{R}(x,c))\wedge\exists x\,(\mathrm{P}(x)\wedge\forall y\,(\mathrm{Q}(y)\Rightarrow\neg\mathrm{R}(x,y)))\wedge\neg\forall x\,(\mathrm{Q}(x)\Rightarrow\exists y\,(\neg\mathrm{R}(y,x)\wedge\mathrm{R}(y,c)))$$

Posljednji izraz ima oblik $F_1 \wedge F_2 \wedge F_3$. Pretvorimo sada klauze F_1, F_2 i F_3 u preneks normalnu formu uz oslobađanje od implikacija:

$$F_1 = (P(x) \Rightarrow R(x,c)) = \forall x\,(\neg P(x) \vee R(x,c))$$

$$F_2 = \exists x\,(P(x) \wedge \forall y\,(Q(y) \Rightarrow \neg R(x,y))) = \exists x\,(P(x) \wedge \forall y\,(\neg Q(y) \vee \neg R(x,y))) =$$
$$= \exists x\,\forall y\,(P(x) \wedge (\neg Q(y) \vee \neg R(x,y)))$$

$$F_3 = \neg\forall x\,(Q(x) \Rightarrow \exists y\,(\neg R(y,x) \wedge R(y,c))) = \exists x\,\neg(Q(x) \Rightarrow \exists y\,(\neg R(y,x) \wedge R(y,c))) =$$
$$= \exists x\,\neg(\neg Q(x) \vee \exists y\,(\neg R(y,x) \wedge R(y,c))) = \exists x\,(Q(x) \wedge \neg\exists y\,(\neg R(y,x) \wedge R(y,c))) =$$
$$= \exists x\,(Q(x) \wedge \forall y\,\neg(\neg R(y,x) \wedge R(y,c))) = \exists x\,(Q(x) \wedge \forall y\,(R(y,x) \vee \neg R(y,c))) =$$
$$= \exists x\,\forall y\,(Q(x) \wedge (R(y,x) \vee \neg R(y,c)))$$

Potražimo sada odbijenicu za ovaj skup klauza:

(1)	$\exists x\,\forall y\,(P(x) \wedge (\neg Q(y) \vee \neg R(x,y)))$	(F_2)
(2)	$\forall y\,(P(a) \wedge (\neg Q(y) \vee \neg R(a,y)))$	(EI iz (1) uz $x \to a$)
(3)	$\exists x\,\forall y\,(Q(x) \wedge (R(y,x) \vee \neg R(y,c)))$	(F_3)
(4)	$\forall y\,(Q(b) \wedge (R(y,b) \vee \neg R(y,c)))$	(EI iz (3) uz $x \to b$)
(5)	$P(a) \wedge (\neg Q(b) \vee \neg R(a,b))$	(UI iz (2) uz $x \to b$)
(6)	$Q(b) \wedge (R(a,b) \vee \neg R(a,c))$	(UI iz (4) uz $y \to a$)
(7)	$\forall x\,(\neg P(x) \vee R(x,c))$	(F_1)
(8)	$\neg P(a) \vee R(a,c)$	(UI iz (7) uz $x \to a$)
(9)	$P(a)$	(logička posljedica (5))
(10)	$R(a,c)$	(rezolucija iz (8) i (9))
(11)	$R(a,b) \vee \neg R(a,c)$	(logička posljedica (6))
(12)	$R(a,b)$	(rezolucija iz (10) i (11))
(13)	$\neg Q(b) \vee \neg R(a,b)$	(logička posljedica (5))
(14)	$\neg Q(b)$	(rezolucija iz (12) i (13))
(15)	$Q(b)$	(logička posljedica (6))

(14) i (15) su kontradiktorni, te formiraju traženu odbijenicu. Dakle, negacija polaznog izraza je kontradiktorna, te je polazni izraz valjan, što je i trebalo pokazati.